

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD
KATEDRA MECHANIKY

Bakalářská práce

Plzeň, 2017

Karel Liška

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD

KATEDRA MECHANIKY

Bakalářská práce

ZÁKLADNÍ MODELY V DYNAMICE ROTUJÍCÍCH SOUSTAV
SE ZAMĚŘENÍM NA ROTORY TURBODMYCHADEL

Plzeň, 2017

Karel Liška

PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracoval samostatně na základě konzultací s vedoucím práce a že jsem uvedl všechny použité prameny a literaturu, ze kterých jsem čerpal.

V Plzni dne 13. června 2017

.....
podpis

PODĚKOVÁNÍ

Na tomto místě bych rád poděkoval vedoucímu bakalářské práce Ing. Miroslavu Byrtusovi, Ph.D. za čas strávený konzultacemi, pečlivým revidováním práce a za poskytnutí cenných rad, materiálů a literatury při jejím vypracovávání.

Dále bych chtěl poděkovat mým rodičům, kteří mě podporovali v průběhu celého studia.

ABSTRAKT

Tato bakalářská práce se zabývá základními matematickými modely v dynamice rotujících soustav se zaměřením na rotory turbodmychadel. Jsou zde popsány základní modely rotorů - Lavalův a Stodolův-Greenův rotor. V kapitole 3 jsou odvozeny matematické modely hřídelů jako 1D kontinuí a tuhých kotoučů použitím metody konečných prvků s uvažováním ohybových kmitů. Pro uložení turbodmychadel jsou často využívána kluzná ložiska s plovoucími pouzdry. Matematické modely těchto ložisek v různých stupních abstrakce jsou odvozeny v kapitole 4.

Cílem této bakalářské práce bylo vytvořit v MATLABu programové vybavení k vyšetřování modálních vlastností rotorové soustavy na základě matematických modelů odvozených v této bakalářské práci a s využitím programového vybavení vytvořit výpočtový model na rotor turbodmychadla výrobce ČZ a.s. Turbo a vyšetřit jeho modální vlastnosti.

Klíčová slova: dynamika rotorů, Lavalův rotor, Stodolův-Greenův rotor, metoda konečných prvků, modální analýza, kritické úhlové rychlosti, turbodmychadlo.

ABSTRACT

This bachelors thesis deals with basic mathematical models in rotordynamics aiming at rotors of turbochargers. Basics models of rotors - Jeffcott and Stodola-Green models are described in this bachelor thesis. In chapter 3 mathematical models of shafts as 1D continuum and rigid disks are derived using finite element method with the consideration of bending vibrations. Turbochargers are often supported by fluid film bearings with floating rings. Mathematical models of these bearings in different levels of abstraction are derived in chapter 4.

Aim of these bachelor thesis was to create software in MATLAB for analysing modal properties of a rotor system composed of mathematical models derived in this bachelor thesis and use software to create the calculation model of the turbocharger of manufacturer ČZ a.s. Turbo and examine its modal properties.

Keywords: rotordynamics, Jeffcott rotor, Stodola-Green rotor, finite element method, modal analysis, critical speed, turbocharger.

Obsah

1	Úvod	6
1.1	Stručná historie dynamiky rotorů	6
1.2	Obsah	7
1.3	Cíle práce	9
2	Přehled základních modelů rotorů	11
2.1	Lavalův rotor s vnějším tlumením na tuhých ložiskách	11
2.2	Lavalův rotor na poddajných ložiskách	18
2.3	Stodolův-Greenův rotor	20
3	Modelování hřídelů jako 1D kontinuí pomocí MKP	26
3.1	Matematický model hřídelového prvku	26
3.1.1	Odvození matic pro hřídelový prvek	31
3.2	Matematický model tuhého kotouče	34
3.3	Matematický model rotoru s pevně nasazenými kotouči	37
4	Matematické modelování ložisek	40
4.1	Matematický model izotropního kluzného ložiska	40
4.2	Matematický model hřídele uloženého na izotropních kluzných ložiskách	41
4.3	Matematický model ložiska s plovoucím pouzdrům	42
4.4	Matematický model hřídele uloženého na ložiskách s plovoucími pouzdry	45
5	Modální analýza rotujících soustav	47
6	Aplikace	51
6.1	Testovací příklady	51

6.1.1	Příklad č. 1	51
6.1.2	Příklad č. 2	53
6.2	Rotor turbodmychadla C1 výrobce ČZ a.s. Turbo	56
6.2.1	Diskretizace turbodmychadla	57
6.2.2	Izotropní model ložisek s plovoucími pouzdry	58
6.2.3	Otáčkově závislý model ložisek s plovoucími pouzdry	60
7	Závěr	66

Kapitola 1

Úvod

1.1 Stručná historie dynamiky rotorů

Vývoj dynamiky rotorů má kořeny ve 2. polovině devatenáctého století a zprvu k němu docházelo spíše v praxi než v teorii.

Jako první provedl teoretickou analýzu rotujícího hřídele William J. M. Rankine v roce 1869. Jeho matematický model o dvou stupních volnosti však předpokládal, že při překročení určitých otáček roste deformace hřídele bez omezení. Tento předpoklad vyvrátil v roce 1889 Gustaf de Laval (Obr. 1.1), který dokázal provozovat parní turbínu v nadkritických otáčkách. V roce 1894 Stanley Dunkerley na základě množství měření definoval důležitý pojem kritických otáček. Tvrdil, že u každého hřídele, jakkoliv dobře vyváženého, lze nalézt takové otáčky, při kterých se hřídel bude značně prohýbat, či praskne.

O rok později publikoval inženýr August Föppl článek, ve kterém ukázal stabilní řešení za prahovou rychlostí. I přes svoji správnost zůstala tato práce vědeckém světě nepovšimnuta. Roku 1916 W. Kerr, dokázal existenci druhých kritických otáček, které chyběly v Rankinově modelu. Ještě téhož roku pověřila Královská společnost Henryho Jeffcotta pro vyřešení rozporu mezi uznávanou a používanou Rankinovou teorií a experimentálními pozorováními. Ten vytvořil nový model rotoru, sestávající se z hmotného kotouče symetricky nasazeného na nehmotném hřídeli se dvěma podporami (označovaný jako Lavalův či Jeffcotův model). Jeffcottovo dílo bylo vydáno v roce 1919 a způsobilo v dynamice rotorů další rozmach.

V roce 1922 vydal Aurel Stodola (Obr. 1.2) publikaci *Parní a plynové turbíny*, ve které shrnul veškeré známe poznatky zahrnující dynamiku hřídelů se spojitě rozloženou hmotností, vyvažování rotorů a grafické metody pro určení hodnoty



Obrázek 1.1: Gustaf de Laval



Obrázek 1.2: Aurel Stodola

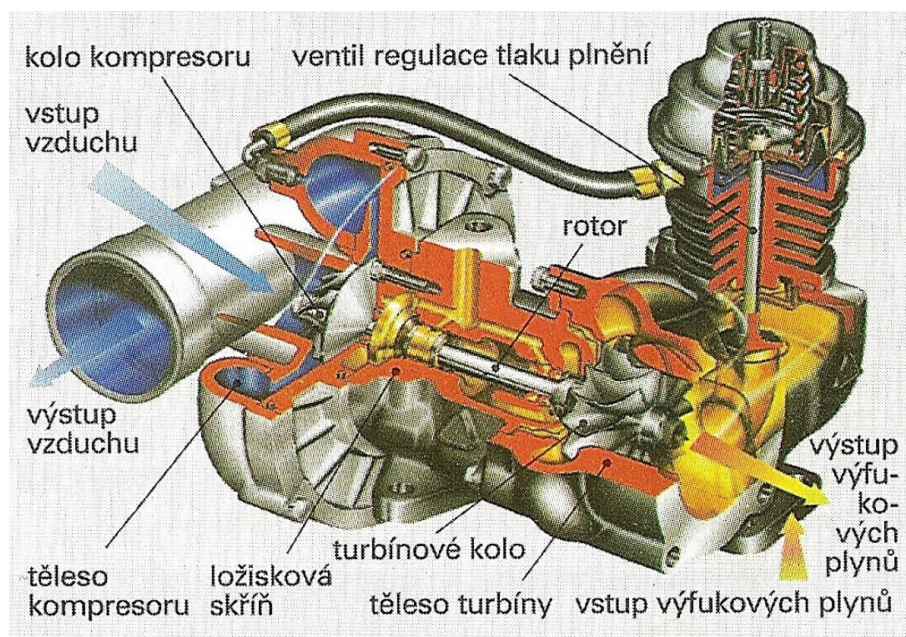
kritických otázek. Dále se mu podařilo zobecnit Lavalův model rotoru, který nezahrnoval vliv gyroskopických účinků. Zobecněný Lavalův model bývá označován jako Stodolův-Greenův rotor. Vlivy gyroskopických účinků se zabývali po 2. světové válce R. Green, Ludwig Föppl a další.

Lavalův i Stodolův-Greenův model přestávaly vyhovovat mj. kvůli rostoucí velikosti a hmotnosti hřídelů, těžko rozlišitelné hranici mezi hřídelem a kotouči (např. u turbín letadel) a vyššímu počtu podpor nebylo možné analyticky popsat a přesně vypočítat vlastnosti tehdejších rotorů. Proto byla na konci třicátých let vytvořena Melvinem Prohlem tzv. metoda přenosových matic, která je vhodná obzvláště pro složité systémy s větším množstvím ložisek.

S nástupem výpočetní techniky byly pokusy o využití metody konečných prvků (MKP), která byla představena ve 40. letech minulého století. Těžké prosazování MKP bylo způsobeno nedostatečnou výpočetní technikou a problémy s algoritmizací numerických metod pro výpočet matic vysokých řádů. MKP se stala zřejmě nejrozšířenější používanou numerickou metodou používanou pro modelování rotorových soustav až po prudkém rozvoji výpočetní techniky na konci 70. a 80. let.

1.2 Obecný princip turbodmychadel

Turbodmychadlo je zařízení, které využívá výfukových plynů ke zvýšení tlaku vzduchu vstupujícího do motoru. Původně bylo vyvíjeno pro letecké motory, a to



Obrázek 1.3: Řez turbodmychadlem [4]

kvůli nižšímu tlaku vzduchu ve vyšších nadmořských výškách, aby do motoru bylo možno dostat vzduch pod vyšším tlakem. Používá se u spalovacích a plynových motorů ke zvýšení výkonu motoru tím, že zvyšuje množství vzduchu vstupujícího do motoru. Nespornou výhodou je významný nárůst výkonu motoru jen s mírným nárůstem váhy a ceny motoru.

Turbodmychadlo je tvořeno turbínovým a kompresorovým kolem ležícím na společné hřídeli (viz Obr. 1.3). Výfukové plyny roztáčejí turbínové kolo, které pohání kolo kompresorové. To vhání nasátý vzduch pod tlakem přes chladič do sacího systému motoru. Do spalovací komory tedy vstupuje větší množství kyslíku. To znamená, že musí být přivedeno i více paliva, aby spalovaná směs měla stále stejný poměr. Je tak dosaženo vyšší objemové účinnosti motoru, a tím i kýženého vyššího výkonu motoru [5].

Turbodmychadlo může pracovat v širokém rozsahu 10 000 – 250 000 otáček za minutu, přičemž rozsah je úměrný jejich velikosti a tvaru. Obecně větší turbodmychadla vykazují větší setrvačné účinky, a proto nedosahují velkých hodnot provozních otáček. Můžeme je najít v tepelných motorech větších rozměrů, např. v motorech stavebních strojů nebo zaoceánských lodí. Oproti tomu malá turbodmychadla, která mají mnohem lepší dynamickou odezvu, pracují v provozních

otáčkách kolem 250 000 otáček za minutu [3]. Nevýhodou malých turbodmychadel je nedostatečný průtok vzduchu turbodmychadlem.

Pro provoz turbodmychadla je typický jev zvaný *turboefekt*¹, který je snaha eliminovat, např. použitím dvoustupňového přeplňování nebo turbíny s naklápěcími lopatkami. Pro regulaci plnicího tlaku vzduchu lze využít obtokový ventil, nebo ztrátovou regulaci odpouštěním stlačeného vzduchu ventilem. Vysoké otáčky kladou značné požadavky na vyvážení hřídele, přesnost výroby, uložení a mazání. Hřídel bývá zpravidla uložena v tzv. plovoucím uložení pomocí olejových kluzných ložisek s plovoucími pouzdry. Turbínové kolo je kvůli vyšším teplotám výfukových plynů vyrobeno ze žáropevné niklové slitiny. Kolo a těleso kompresoru je vyrobeno naopak ze slitiny hliníku, skříň ložisek a těleso turbíny je z temperované šedé litiny.

Turbodmychadlo s naklápěcími lopatkami pracuje na principu rovnice kontinuity. Rychlost proudícího plynu trubicí o konstantním objemu je tím větší, čím menší je průřez trubice. Při běhu motoru ve vysokých otáčkách dochází ke zvětšení průřezu a snížení otáček turbíny na požadovanou hodnotu.

Využití různých velikostí turbodmychadel nalezneme v tzv. dvoustupňovém přeplňování, kdy dvě různě velká turbodmychadla jsou zapojená za sebou do „série“. Menší turbodmychadlo zajišťuje výkon při nízkých otáčkách motoru a naopak větší při vyšších otáčkách motoru. Pomocí dvoustupňového přeplňování lze eliminovat turboefekt a zátaž motoru se stává plynulejším a turbodmychadlo pracuje efektivně při nízkých i vysokých otáčkách.

Aktuálním trendem automobilových společností je downsizing, neboli snižování objemu spalovacích motorů s minimálním omezením výkonu a točivého momentu.

1.3 Cíle práce

Cíle této bakalářské práce bylo následující:

- shrnout historický vývoj v oblasti dynamiky rotorů a princip fungování turbodmychadel,
- ukázat přehled nejjednodušších modelů rotorů,
- vytvořit model hřídelů jako 1D kontinuí pomocí MKP,

¹*Turboefekt* je doba, která je třeba k vytvoření dostatečné kinetické energie výfukových plynů k roztočení turbínového kola.

- aplikovat vytvořený model na rotor turbodmychadla řady C1 výrobce ČZ a.s. Turbo a vyšetřit jeho modální vlastnosti.

Kapitola 2

Přehled základních modelů rotorů

Jako rotor je označována součást různých strojů, konající rotační pohyb. V této kapitole jsou shrnuty nejjednodušší matematické modely rotorů. Tyto matematické modely lze využít při znalosti konkrétních parametrů pro stanovení stability pohybu rotoru a pro určení vlastních frekvencí, resp. kritických otáček.

V následujícím textu se budeme zabývat vyšetřováním základních vlastností matematických modelů rotorů a jevů, které jsou vyvolané zejména jejich nevyvážeností. V důsledku výrobních nepřesností nelze vyrobit dokonale rotačně symetrické těleso a po výrobě není rozložení hmoty vůči ose rotace symetrické. Těžiště tělesa neleží tedy v ose rotace a při rotačním pohybu jsou v důsledku toho přítomny odstředivé síly.

Tento problém se dá zčásti eliminovat vyvažováním rotoru. To je dosaženo připojením vývažků ve dvou libovolných vyvažovacích rovinách na rotoru.

2.1 Lavalův rotor s vnějším tlumením na tuhých ložiskách

Nejjednodušší model rotoru je označován jako Lavalův (či Jeffcottův) model rotoru. Skládá se z hmotného kotouče nasazeného na pružném hřídeli uprostřed mezi tuhými ložisky. Kotouč je navíc rotačně symetrický, pohybuje se v rovině kolmé na osu nedeformovaného hřídele a nenaklápí se. Lavalův model rotoru předpokládá, že hmotnost hřídele je vůči hmotnosti kotouče zanedbatelná.

Model je odvozen s uvažováním vnějšího tlumení. Existuje také tlumení vnitřní, které bude popsáno dále v textu. Tento model lze s výhodou využít pro stanovení prvních kritických otáček.

Odvození pohybových rovnic

Pro sestavení pohybových rovnic Lavalova rotoru lze využít několik způsobů, např. podmínky dynamické rovnováhy, druhého Newtonova zákona či Lagrangeovy rovnice druhého druhu. Jelikož Lagrangeovy rovnice druhého druhu jsou vhodné i pro sestavování složitějších mechanických soustav, byla zde využita tato metoda. Tyto rovnice mají obecně tvar [9]

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial E_p}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial R}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \quad (2.1)$$

kde E_k je kinetická energie soustavy, E_p potenciální energie soustavy, R Rayleighova disipační funkce, \mathbf{q} vektor zobecněných souřadnic a $\mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ vektor zobecněných vnějších sil.

Zavedeme pevný souřadnicový systém xyz , kde osa z leží ve směru osy nedeformovaného hřídele a další dvě osy ve střední rovině kotouče. Počátek O leží v průsečíku geometrického středu nevychýleného kotouče (značíme S) a hřídele, viz Obr. 2.1. Nebudeme uvažovat statický průhyb od tíhové síly. Polohu bodu S označíme x_S, y_S v rovině symetrie rotoru $\hat{x}y$. Těžiště kotouče T má od bodu S konstantní vzdálenost, představující excentricitu kotouče, kterou značíme ε . Toto vyosení je dáno nehomogenitou materiálu kotouče nebo např. nerovnoměrným olopatkováním u parních turbín. Od bodu O má těžiště souřadnice $T[x_T, y_T]$ (viz Obr. 2.2). Excentricita i výchylka jsou v porovnání s geometrickými rozměry kotouče malé. Dále uvažujme rotační pohyb hřídele konstantní úhlovou rychlostí ω , který rotuje společně s kotoučem. Vektor zobecněných souřadnic má tedy tvar

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_S(t) \\ y_S(t) \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Polohový vektor bodu T pro ustálený stav, kdy je uvažována konstantní rychlost rotace $\omega = konst.$, můžeme v souřadnicovém systému xyz zapsat jako

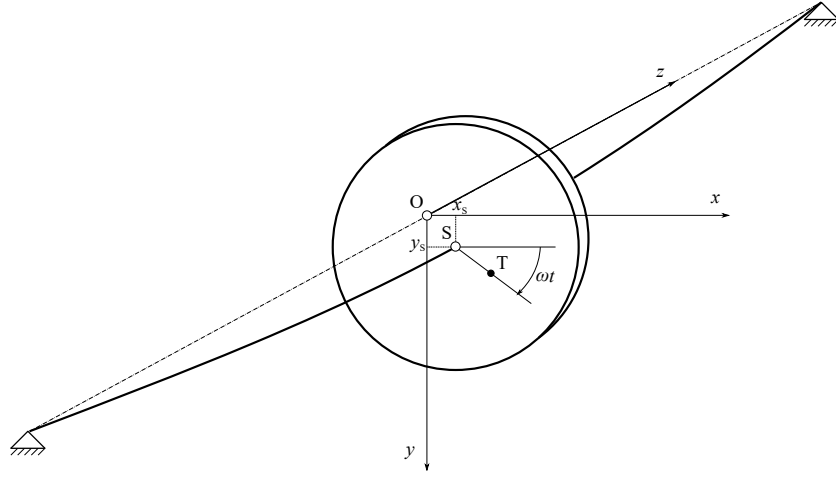
$$\mathbf{r}_T(t) = \begin{bmatrix} x_S(t) + \varepsilon \cos(\omega t) \\ y_S(t) + \varepsilon \sin(\omega t) \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

a rychlost

$$\dot{\mathbf{r}}_T(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_S(t) - \varepsilon \omega \sin(\omega t) \\ \dot{y}_S(t) + \varepsilon \omega \cos(\omega t) \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Využitím vztahu (2.4) lze vyjádřit kinetickou energii kotouče o hmotnosti m jako

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \{ \dot{x}_S^2 + \dot{y}_S^2 + \varepsilon^2 \omega^2 + 2\varepsilon \omega [-\dot{x}_S \sin(\omega t) + \dot{y}_S \cos(\omega t)] \}. \quad (2.5)$$



Obrázek 2.1: Souřadnicový systém Lavalova rotoru

Potenciální (deformační) energie *anizotropního hřídele*¹ je

$$E_p = \frac{1}{2}k_x x_S^2 + \frac{1}{2}k_y y_S^2, \quad (2.6)$$

respektive v případě *izotropního hřídele*²

$$E_p = \frac{1}{2}k (x_S^2 + y_S^2). \quad (2.7)$$

V případě vnějšího tlumení s koeficientem tlumení $b = b_x = b_y$ můžeme psát disipační funkci

$$R = \frac{1}{2}b (\dot{x}_S^2 + \dot{y}_S^2). \quad (2.8)$$

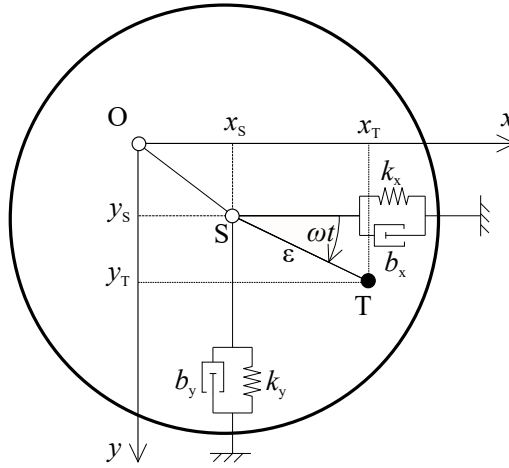
V případě, že na kotouč nebudou působit žádné vnější síly, bude virtuální práce nulová a vektor zobecněných vnějších sil $\mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{0}$. Aplikací Lagrangeových rovnic (2.1) druhého druhu pro vztahy (2.5), (2.7) a (2.8) získáme soustavu dvou lineárních diferenciálních rovnic 2. řádu

$$m\ddot{x}_S + b\dot{x}_S + kx_S = m\varepsilon\omega^2 \cos(\omega t), \quad (2.9)$$

$$m\ddot{y}_S + b\dot{y}_S + ky_S = m\varepsilon\omega^2 \sin(\omega t). \quad (2.10)$$

¹Anizotropní hřídel je takový hřídel, který má rozdílné příčné tuhosti, neboli $k_x \neq k_y$.

²Izotropní hřídel je takový hřídel, který má shodné příčné tuhosti, neboli $k_x = k_y$.



Obrázek 2.2: Řez kotouče v rovině xy

Po zavedení veličin vlastní frekvence $\Omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ a poměrného útlumu $D = \frac{b}{\sqrt{km}}$ můžeme tyto rovnice přepsat do tvaru

$$\ddot{x}_S + 2D\Omega\dot{x}_S + \Omega^2 x_S = \varepsilon\omega^2 \cos(\omega t), \quad (2.11)$$

$$\ddot{y}_S + 2D\Omega\dot{y}_S + \Omega^2 y_S = \varepsilon\omega^2 \sin(\omega t). \quad (2.12)$$

Soustavu pohybových rovnic (2.11) a (2.12) lze zapsat v komplexním vyjádření. Pronásobíme-li rovnici (2.12) imaginární jednotkou i a sečteme ji s rovnicí (2.11) dostaneme pohybovou rovnici ve tvaru

$$\ddot{\tilde{r}}_S(t) + 2D\Omega\dot{\tilde{r}}_S(t) + \Omega^2 \tilde{r}_S(t) = \varepsilon\omega^2 e^{i\omega t}, \quad (2.13)$$

kde $\tilde{r}_S(t) = x_S + iy_S$ je komplexní výchylka bodu S . Partikulární řešení této diferenciální rovnice lze psát ve tvaru

$$\tilde{r}_S(t) = \tilde{r} e^{i\omega t}, \quad (2.14)$$

kde \tilde{r} komplexní amplituda výchylky. Pokud u tohoto vztahu provedeme časové derivace a dosadíme do (2.13), dostaneme komplexní amplitudu ve tvaru

$$\tilde{r} = \varepsilon\omega^2 \frac{1}{\Omega^2 - \omega^2 + i2D\Omega\omega}. \quad (2.15)$$

Vezmeme-li absolutní hodnotu výchylky v komplexním tvaru, dostaneme vzdálenost r bodu S bodu O

$$r = |\tilde{r}| = \varepsilon\omega^2 \frac{1}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega^2)^2 + 4D^2\Omega^2\omega^2}}. \quad (2.16)$$

Při použití veličiny naladění $\eta = \frac{\omega}{\Omega}$ a vydělením vztahu (2.16) excentricitou ε dostáváme vyjádření amplitudové charakteristiky (Obr. 2.4) v bezrozměrovém tvaru

$$\frac{r}{\varepsilon} = \frac{\eta^2}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}}. \quad (2.17)$$

Často se při vyšetřování vlastností kmitavých soustav uvádí i fázová charakteristika (Obr. 2.5), která může být snadno vyjádřena na základě komplexní výchylky \tilde{r} . Převédeme-li komplexní výchylku na tvar, ze kterého získáme reálnou a imaginární část

$$\tilde{r} = \varepsilon\omega^2 \frac{\Omega^2 - \omega^2 - i2D\Omega\omega}{(\Omega^2 - \omega^2)^2 + 4D^2\Omega^2\omega^2} \quad (2.18)$$

můžeme pak vyjádřenou reálnou a imaginární část zapsat následovně

$$Re\{\tilde{r}\} = \varepsilon\omega^2 \frac{\Omega^2 - \omega^2}{(\Omega^2 - \omega^2)^2 + 4D^2\Omega^2\omega^2},$$

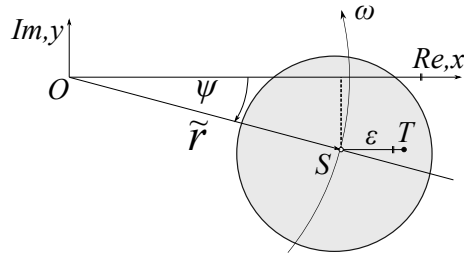
$$Im\{\tilde{r}\} = -\varepsilon\omega^2 \frac{2D\Omega\omega}{(\Omega^2 - \omega^2)^2 + 4D^2\Omega^2\omega^2}.$$

Na Obr. 2.3 je zakreslen okamžik, ve kterém je vektor excentricity rovnoběžný s reálnou osou x . Odtud lze vyjádřit fázi ψ , která vyjadřuje vzájemnou polohu průvodičů \overline{OS} a ε jako [6]

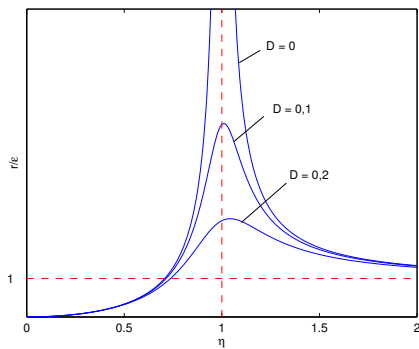
$$\operatorname{tg} \psi = \frac{2D\Omega\omega}{\Omega^2 - \omega^2} = \frac{2D\eta}{1 - \eta^2}. \quad (2.19)$$

Lze vidět, že pro $\eta \rightarrow 1$ dosahuje hřídel *kritických otáček*³. U netlumeného systému ($D = 0$) rostou amplitudy výchylky hřídele nade všechny meze. Amplituda v rezonanční oblasti pro $\eta = 1$ klesá se zvětšujícím se poměrným útlumem, viz Obr. 2.4. Fáze ψ se zvětšuje s narůstající úhlovou rychlostí ω k hodnotě 180°

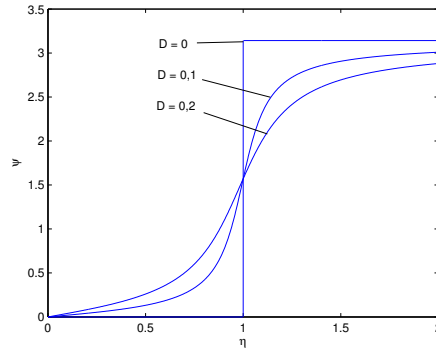
³Kritické otáčky rotoru jsou takové otáčky, při nichž se otáčky rotoru rovnají vlastní frekvenci rotoru $\omega = \Omega$, neboli $\eta = 1$. Soustava je citlivá na vybuzení kmitání vlivem roující nevývahy.



Obrázek 2.3: Vzájemná poloha průvodičů \overline{OS} a ε



Obrázek 2.4: Amplitová charakteristika Lavalova rotoru pro 3 různé poměrné útlumy



Obrázek 2.5: Fázová charakteristika Lavalova rotoru pro 3 různé poměrné útlumy

a způsobuje změnu relativní polohy těžiště T a středu kotouče S . U netlumeného systému je tato změna skoková a dochází k ní pro $\eta = 1$.

Pro praktické účely je vhodné zapsat pohybové rovnice maticovým zápisem. Rovnice (2.11) a (2.12) lze zapsat v maticovém tvaru

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f}(t), \quad (2.20)$$

kde \mathbf{M} je matice hmotnosti, \mathbf{K} matice tuhosti, \mathbf{B} matice vnějšího tlumení, \mathbf{f} je vektor zobecněných sil a \mathbf{q} vektor zobecněných souřadnic ve tvaru

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} m\varepsilon\omega \cos(\omega t) \\ m\varepsilon\omega \sin(\omega t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} x_S \\ y_S \end{bmatrix}.$$

Vnitřní tlumení

Vedle tlumení vnějšího se objevuje také tlumení vnitřní. Vnější tlumení je způsobeno odporem prostředí, v němž hřídel rotuje, a působící síly zde působí kolmo na povrch hřídelového prvku proti jeho absolutní rychlosti. Oproti tomu vnitřní tlumení je dáno materiálovým útlumem samotného hřídele. Pro modelování vnitřního tlumení budeme uvažovat Kelvin-Voightův materiálový model. To znamená, že materiál je tvořen z vláken, které mají kromě pružných vlastností také vlastnosti tlumící. Při prohýbání rotoru jsou tak vlákna střídavě namáhána na tah a tlak a tím dochází k disipaci energie. Vnitřní tlumení má při vysokých otáčkách v nadrezonanční oblasti vliv na stabilitu systému a může způsobit jeho destabilizaci.

U rotujícího hřídele jsou síly vybuzeé vnitřním tlumením úměrné úhlovým rychlostem ω , avšak vyjádřené v rotujícím souřadnicovém systému $\xi\eta\zeta$ (Obr. 2.6). Tlumící sílu lze při uvažování konstantní úhlové rychlosti ω zapsat v tomto systému ve tvaru

$$\mathbf{f}_{r\xi\eta} = -b_r \begin{bmatrix} \dot{\xi}_S \\ \dot{\eta}_S \end{bmatrix}, \quad (2.21)$$

kde b_r je koeficient rotujícího tlumení. Pro převedení výchylky středu hřídele do nerotujícího systému souřadnic xyz použijeme následující transformaci

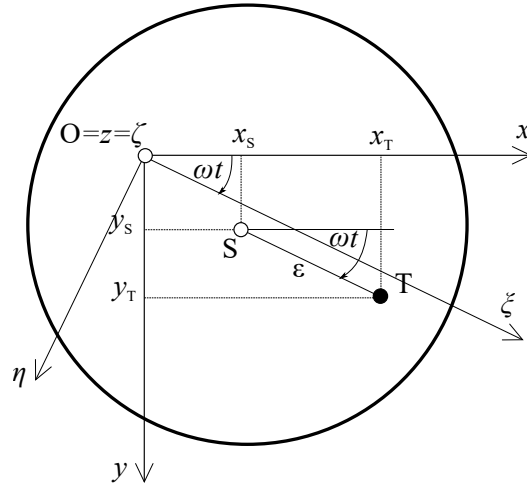
$$\begin{bmatrix} \xi_S \\ \eta_S \end{bmatrix} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} x_S \\ y_S \end{bmatrix}, \quad (2.22)$$

kde \mathbf{R} je matice rovinné rotace kolem osy $z = \xi$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

Derivací vztahu (2.22) dostaneme vektor rychlosti v rotujícím souřadnicovém systému vztahu (2.21). Nesmíme však zapomenout, že matice rovinné rotace (2.23) je časově závislá. Tlumící sílu v pevném souřadnicovém systému pak lze vyjádřit následovně

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{rxy} &= \mathbf{R}^T \mathbf{f}_{r\xi\eta} = -b_r \left(\mathbf{R}^T \mathbf{R} \begin{bmatrix} \dot{x}_S \\ \dot{y}_S \end{bmatrix} + \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}} \begin{bmatrix} x_S \\ y_S \end{bmatrix} \right) \\ &= -b_r \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_S \\ \dot{y}_S \end{bmatrix} - b_r \omega \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_S \\ y_S \end{bmatrix} \\ &= -\mathbf{B}_r \dot{\mathbf{q}} - \omega \mathbf{K}_r \mathbf{q}, \end{aligned} \quad (2.24)$$



Obrázek 2.6: Řez kotouče v rovině xy a zavedení souřadnicového systému $\xi\eta\zeta$

kde $\mathbf{q} = [x_S, y_S]^T$. Ze vztahu (2.24) je vidět, že budící síla je závislá nejen na výchylce a rychlosti, ale také na úhlové rychlosti otáčení hřídele ω . Pokud přidáme sílu od vnitřního tlumení do modelu (2.20) dostáváme

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{B} + \mathbf{B}_r)\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + \omega\mathbf{K}_r)\mathbf{q} = \mathbf{f}(t), \quad (2.25)$$

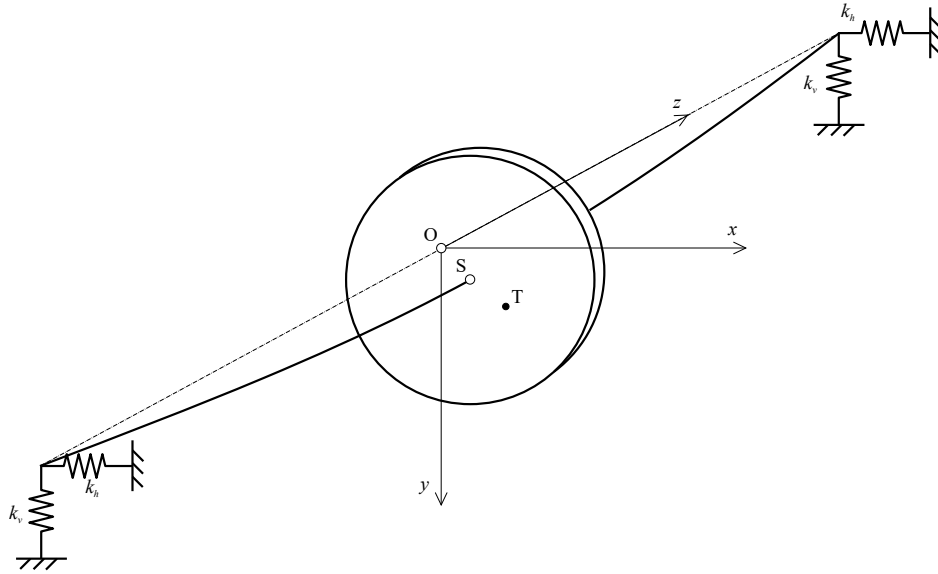
kde \mathbf{M} je matice hmotnosti, \mathbf{B} matice vnějšího tlumení, \mathbf{B}_r matice vnitřního tlumení, \mathbf{K} matice tuhosti, \mathbf{K}_r cirkulační matice, \mathbf{f} je vektor zobecněných sil a \mathbf{q} vektor zobecněných souřadnic ve tvaru

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_r = \begin{bmatrix} b_r & 0 \\ 0 & b_r \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_r = \begin{bmatrix} 0 & b_r \\ -b_r & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} m\varepsilon\omega \cos(\omega t) \\ m\varepsilon\omega \sin(\omega t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} x_S \\ y_S \end{bmatrix}.$$

2.2 Lavalův rotor na poddajných ložiskách

Nechť platí všechny předpoklady jako u Lavalova rotoru na tuhých ložiskách kromě toho, že v tomto případě uvažujeme ložiska poddajná (Obr. 2.7). Ukážeme vliv ložisek na kritické otáčky. Poddajnost ložisek je vyjádřena pružinami v horizontálním a vertikálním směru označené jako k_h a k_v . Tuhosti v těchto směrech bývají například u valivých ložisek málo odlišné a jsou závislé na statickém zatížení. Zpravidla bývá vertikální tuhost vyšší než tuhost horizontální.



Obrázek 2.7: Lavalův rotor na poddajných ložiskách

Výslednou tuhost soustavy ve směrech x a y potom vyjádříme, jako kdyby byly pružiny zapojeny do série

$$\frac{1}{k_x} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k_h}, \quad \frac{1}{k_y} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k_v}, \quad (2.26)$$

kde k je tuhost hřídele, k_x a k_y jsou výsledné tuhosti soustavy ve směrech x a y . Odtud mají vlastní frekvence hodnoty

$$\Omega_x = \sqrt{\frac{k_x}{m}}, \quad \Omega_y = \sqrt{\frac{k_y}{m}}. \quad (2.27)$$

Výsledný matematický model můžeme psát analogicky ke vztahům (2.11) a (2.12) ve tvaru

$$\ddot{x}_S + 2D_x\Omega_x\dot{x}_S + \Omega_x^2 x_S = \varepsilon\omega^2 \cos(\omega t), \quad (2.28)$$

$$\ddot{y}_S + 2D_y\Omega_y\dot{y}_S + \Omega_y^2 y_S = \varepsilon\omega^2 \sin(\omega t). \quad (2.29)$$

Z definice poměrného útlumu $D = \frac{b}{\sqrt{km}}$ vidíme, že na tuhosti ložisek závisí i poměrné útlumy D_x a D_y . Různé tuhosti ložisek v příčných směrech nám způsobí vznik dvou různých kritických otáček, viz Obr. 2.8. Partikulární řešení diferenciálních rovnic (2.28) a (2.29) lze odhadnout ve tvaru

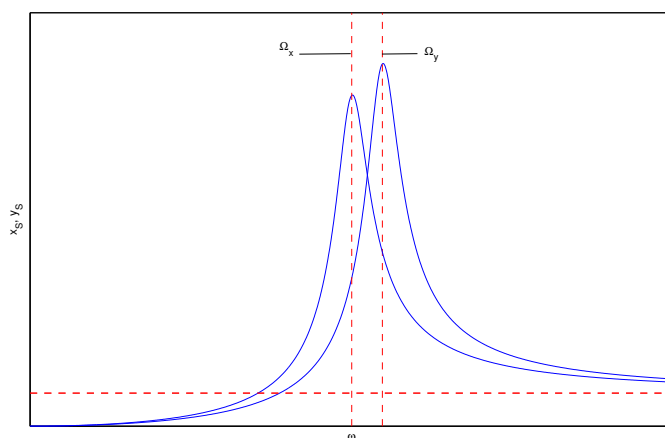
$$x_S(t) = x_S \cos(\omega t - \psi_x),$$

$$y_S(t) = y_S \sin(\omega t - \psi_y),$$

kde x_S, y_S jsou amplitudy výchylek a ψ_x, ψ_y jsou fázová posunutí. Jestliže tyto rovnice upravíme za předpokladu $D_x \doteq D_y$ a $\psi_x \doteq \psi_y$ do tvaru

$$\frac{x_S^2(t)}{x_S^2} + \frac{y_S^2(t)}{y_S^2} = 1, \quad (2.30)$$

tak vidíme, že tato rovnice vyjadřuje rovnici elipsy a že střed kotouče bude konat pohyb po elipse. Lze ukázat, že v případě Lavalova rotoru při uvažování izotropního hřídele uloženého na tuhých ložiskách, či ložiskách se stejnými tuhostmi v horizontálním a vertikálním směru přejde rovnice elipsy do rovnice kružnice a střed kotouče bude konat pohyb po kružnici.



Obrázek 2.8: Amplitudová charakteristika pro poddajný Lavalův rotor

2.3 Stodolův-Greenův rotor

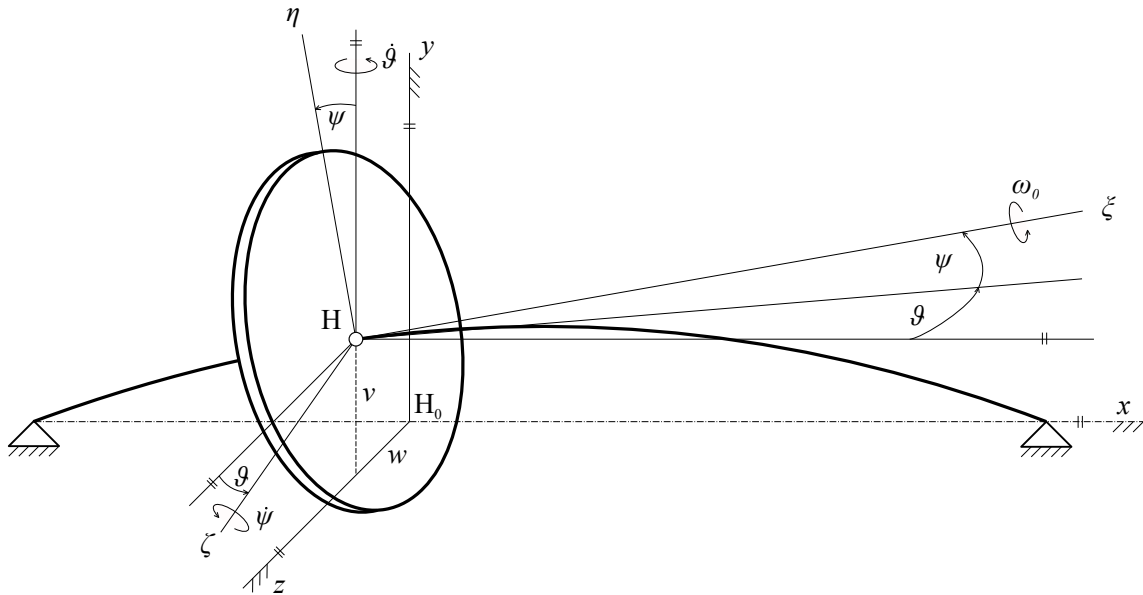
Stodolův-Greenův rotor je zobecněným případem Lavalova rotoru, kdy je kotouč uložen na poddajném hřídeli v obecné poloze. Tento fakt způsobuje oproti Lavalovu modelu navíc naklápění kotouče vlivem prohnutí hřídele. Též u tohoto modelu vznikají gyroscopické účinky. Předpokládejme nehmotný hřídel kruhového

průřezu usazeného v tuhých ložiskách a malé výchylky ze statické rovnovážné polohy v místě nasazení kotouče. Při odvození nebudeme uvažovat tlumení.

Pro tento model rotoru je sestaven *Campbellův diagram*⁴, ve kterém je též znázorněna souběžná a protiběžná precese.

Odvození pohybových rovnic

Matematický model sestavíme v pevném souřadnicovém systému xyz . Za počátek tohoto souřadnicového systému označíme střed hmotnosti kotouče H_0 u nedeformovaného hřídele. Výchylku geometrického středu H deformovaného hřídele ve směru osy y , resp. z označíme v , resp. w . Úhly natočení kolem os y a z označíme φ_y a φ_z . Dále zavedeme rotující souřadnicový systém $\xi\eta\zeta$, který má počátek v bodě H a rotuje společně s kotoučem. Výše popsany model lze vidět na Obr. 2.9.



Obrázek 2.9: Souřadnicový systém Stodolova-Greenova rotoru

K odvození pohybových rovnic využijeme opět Lagrangeovy rovnice druhého

⁴*Campbellův diagram* zobrazuje závislost vlastní frekvence na úhlové rychlosti. Lze z něho určit kritické otáčky.

druhu ve tvaru (2.1), kde vektor zobecněných souřadnic je teď ve tvaru

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ \varphi_z \\ w \\ \varphi_y \end{bmatrix}. \quad (2.31)$$

Uvažujme rovnoměrnou vlastní rotaci kotouče s úhlovou rychlostí ω_0 . Potom aplikací základního rozkladu prostorového pohybu kotouče v referenčním bodě H na unášivý pohyb posuvný rychlostí $\mathbf{v} = [0 \ \dot{v} \ \dot{w}]^T$ a na relativní pohyb sférický okamžitou úhlovou rychlostí $\boldsymbol{\omega} = [\omega_0 + \dot{\vartheta} \sin \psi, \ \dot{\vartheta} \cos \psi, \ \dot{\psi}]^T$ získáme kinetickou energii jako energii od těchto pohybů

$$E_k = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^T \mathbf{v} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}, \quad (2.32)$$

kde m je hmotnost a $\mathbf{I} = \text{diag}(I_0, I, I)$ je diagonální matice setrvačnosti rotačně symetrického kotouče v rotující souřadnicové soustavě $\xi\eta\zeta$. Za předpokladu malých výchylek můžeme položit $\vartheta \doteq \varphi_y$ a $\psi \doteq \varphi_z$.

Potenciální (deformační) energii hřídele lze rozepsat jako

$$E_p = \frac{1}{2} [v \ \varphi_z]^T \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \varphi_z \end{bmatrix} + \frac{1}{2} [w \ \varphi_y]^T \begin{bmatrix} k_{11} & -k_{12} \\ -k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \varphi_y \end{bmatrix}, \quad (2.33)$$

kde $k_{11}, k_{12}, k_{21}, k_{22}$ jsou koeficienty tuhosti hřídele. Lze je získat např. z metody příčnickových koeficientů [7].

Pokud provedeme příslušné derivace v Lagrangeových rovnicích druhého druhu (2.1) a za předpokladu, že vektor zobecněných sil $\mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{0}$, můžeme pohybové rovnice přepsat do maticového tvaru

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \omega_0 \mathbf{G} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad (2.34)$$

kde \mathbf{M} je matice hmotnosti ve tvaru

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix},$$

\mathbf{G} je matice gyroskopických účinků

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

a \mathbf{K} je matice tuhosti hřídele

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 & 0 \\ k_{21} & k_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{11} & -k_{12} \\ 0 & 0 & -k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}.$$

Maticový zápis pohybových rovnic představuje 4 diferenciální rovnice 2. řádu. Označme písmeny (a)-(d) první až čtvrtý řádek rovnic (2.34) a po provedení součtů

$$\begin{aligned} (a) + i(c) : m(\ddot{u} + i\ddot{w}) + k_{11}(u + iw) + k_{12}(\varphi_z - i\varphi_y) &= 0, \\ (b) - i(d) : I(\ddot{\varphi}_z - i\ddot{\varphi}_y) - iI_0\omega(\dot{\varphi}_z - i\dot{\varphi}_y) + k_{21}(v + iw) + k_{22}(\varphi_z - i\varphi_y) &= 0 \end{aligned} \quad (2.35)$$

a zavedení komplexních proměnných $r(t) = u + iw$ a $\vartheta(t) = \varphi_z - i(\varphi_y)$ dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} m\ddot{r}(t) + k_{11}r(t) + k_{12}\vartheta(t) &= 0, \\ I\ddot{\vartheta}(t) - iI_0\omega\dot{\vartheta}(t) + k_{21}r(t) + k_{22}\vartheta(t) &= 0. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Homogenní řešení lze psát ve tvaru $r(t) = re^{i\Omega t}$ a $\vartheta(t) = \vartheta e^{i\Omega t}$, kde Ω je úhlová rychlost otáčení roviny průhybové čáry. Dosazením tohoto řešení do rovnic (2.36) a zaplácáním do maticového zápisu získáváme

$$\begin{bmatrix} k_{11} - m\Omega^2 & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} - I\Omega^2 + I_0\omega\Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ \vartheta \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (2.37)$$

Tento vztah platí za předpokladu, že determinant matice $D = 0$. Neboli

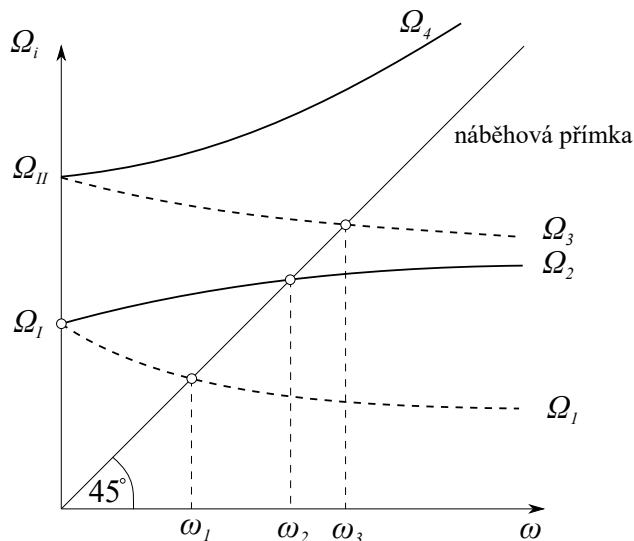
$$mI\Omega^4 - mI_0\omega\Omega^3 - (mk_{22} + I k_{11})\Omega^2 + I_0k_{11}\omega\Omega + k_{11}k_{12} - k_{12}^2 = 0. \quad (2.38)$$

Pro $\omega > 0$ jsou řešením této rovnice dva kladné reálné kořeny a dva záporné reálné kořeny. Seřadíme-li je vzestupně podle velikosti absolutní hodnoty, pak $\Omega_1 < 0, \Omega_2 > 0, \Omega_3 < 0, \Omega_4 > 0$. Pro $\omega = 0$ se z předchozího vztahu (2.38) stane kvadratická rovnice

$$mI\Omega^4 - (mk_{22} + I k_{11})\Omega^2 - k_{12}^2 = 0. \quad (2.39)$$

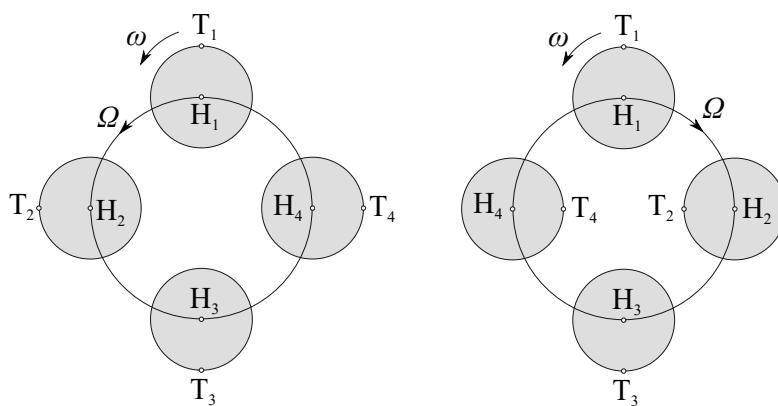
Pro úhlovou rychlost $\omega = 0$ získáme dvě vlastní frekvence, které označíme Ω_I a Ω_{II} . Grafická závislost vlastních frekvencí modelu rotoru na úhlové rychlosti jeho

otáčení je zobrazena v Campbellovu diagramu na Obr. 2.10. Pro přehlednost je závislost vlastních frekvencí na úhlové rychlosti zobrazena v horním kvadrantu souřadnicového systému ω, Ω . Čárkovanou čarou jsou znázorněny záporné vlastní frekvence, které odpovídají tzv. protiběžné precesi a kladné vlastní frekvence jsou zobrazeny plnou čarou a odpovídají souběžné precesi.



Obrázek 2.10: Campbellův diagram Stodolova-Greenova rotoru

Kritické otáčky jsou v Campbellovu diagramu dány průsečíky jednotlivých větví vlastních frekvencí s tzv. náběhovou přímkou, jsou to tedy takové hodnoty vlastních frekvencí, které přesně odpovídají frekvenci otáčení hřídele (rotoru). Kritické úhlové rychlosti ω_2 , příp. ω_4 jsou charakterizovány souběžnou synchronní precesí, kdy střed hřídele H obíhá kružnici ve směru otáčení kotouče (Obr. 2.11 vlevo). Oproti tomu kritické úhlové rychlosti ω_1 a ω_3 jsou charakterizovány protiběžnou synchronní precesí, kdy střed hřídele H obíhá kružnici v opačném směru otáčení kotouče (Obr. 2.11 vpravo). Existence 4. kritické otáčky ω_4 závisí na momentech setrvačnosti kotouče I_0 a I [7].



Obrázek 2.11: Znázornění synchronní souběžné precese (vlevo) a protiběžné synchronní precese (vpravo)

Kapitola 3

Modelování hřídelů jako 1D kontinuí pomocí MKP

Jak již bylo zmíněno v kapitole 1 v současnosti nejpoužívanější metodou pro sestavování matematických modelů rotujících soustav je metoda konečných prvků (MKP). Základním prvkem rotujících soustav jsou hřídele, jež většinou mají příčný rozměr značně menší než rozměr podélný a proto je lze považovat za 1D kontinuum. Součástí rotujících soustav jsou různé kotouče (disky, ozubená kola, turbínová kola, kompresorová kola apod.) nasazené na hřídelích.

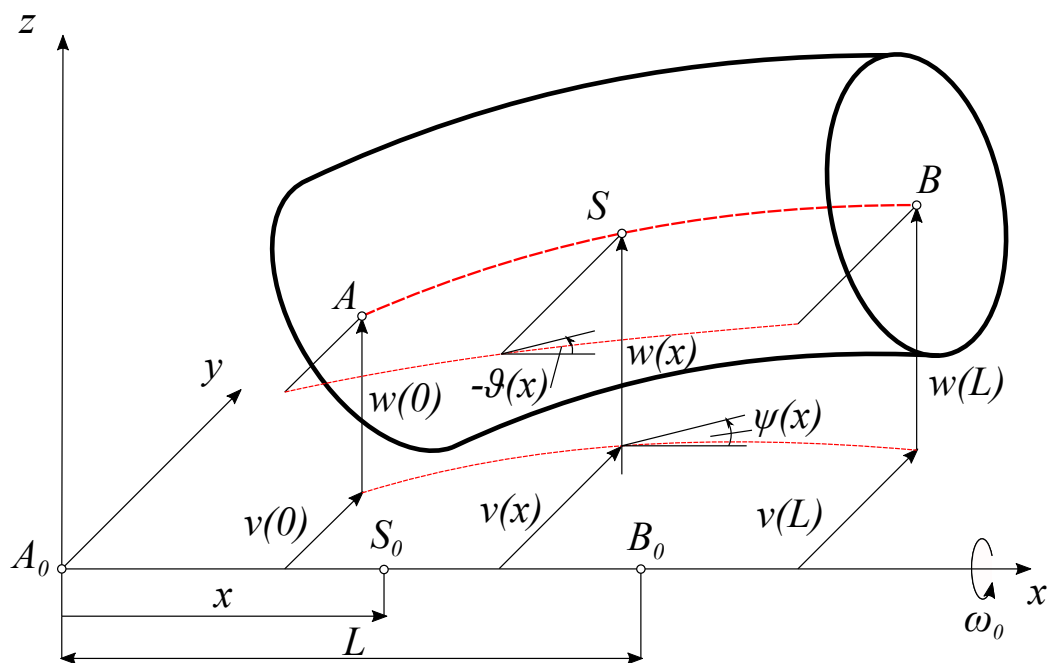
V této kapitole bude odvozen model hřídele jako 1D kontinua pomocí MKP doplněný o kotouče.

3.1 Matematický model hřídelového prvku

Uvažujme prizmatický hřídelový prvek se spojitě rozloženou hmotností o délce L s plošným obsahem průřezu A otáčející se konstantní úhlovou rychlostí ω_0 kolem osy x v pevném souřadnicovém systému xyz (Obr. 3.1), ve kterém jsou též popsány jeho deformace. Nechť je hřídelový prvek tvořen z homogenního materiálu s hustotou ρ a modulem pružnosti v tahu E a ve smyku G . Při sestavování modelu je zanedbána podélná deformace ve směru osy x a torzní natočení.

Body A_0 , B_0 a S_0 , resp. A , B , S na Obr. 3.1 znázorňují polohu nedeformovaného prvku, resp. deformovaného prvku. Příčné výchylky v obecném místě x označíme $v(x, t)$ ve směru osy y a $w(x, t)$ ve směru osy z . Natočení popíšeme Eulerovými úhly $\psi(x, t)$ a $\vartheta(x, t)$. Z důvodu pravotočivého systému souřadnic má úhel ϑ záporné znaménko. Červenými křivkami je značen průmět průhybové

křivky do rovin xy a xz .



Obrázek 3.1: Hřídelový prvek v pevném souřadnicovém systému

Podle Rayleighovy teorie platí vztah mezi natočením a příčnými výchylkami

$$\begin{aligned}\psi &= \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \vartheta &= -\frac{\partial w}{\partial x}.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Příčnou výchylku $v(x, t)$ bodu S lze aproximovat pomocí polynomu třetího stupně

$$\begin{aligned}v(x, t) &= C_1(t) + C_2(t)x + C_3(t)x^2 + C_4(t)x^3 = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \\ C_3(t) \\ C_4(t) \end{bmatrix}, \\ v(x, t) &= \Phi^T(x) \mathbf{c}_1(t),\end{aligned}\tag{3.2}$$

kde $\mathbf{c}_1(t)$ je vektor koeficientů a $\Phi(x) = [1 \ x \ x^2 \ x^3]^T$. Pro natočení ψ ze vztahu (3.1) platí

$$\psi(x, t) = C_2(t) + 2C_3(t)x + 3C_4(t)x^2 = [0 \ 1 \ 2x \ 3x^2] \begin{bmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \\ C_3(t) \\ C_4(t) \end{bmatrix},$$

$$\psi(x, t) = \Phi'^T(x) \mathbf{c}_1(t). \quad (3.3)$$

K vyjádření posuvu a natočení v místě x je potřeba znát prvky vektoru koeficientů \mathbf{c}_1 . Ty lze určit z geometrických okrajových podmínek

$$\begin{aligned} v(0, t) &= C_1(t), \\ \psi(0, t) &= C_2(t), \\ v(L, t) &= C_1(t) + C_2(t)L + C_3(t)L^2 + C_4(t)L^3, \\ \psi(L, t) &= C_2(t) + 2C_3(t)L + 3C_4(t)L^2. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Tuto soustavu rovnic lze zapsat v maticovém tvaru

$$\begin{bmatrix} v(0, t) \\ \psi(0, t) \\ v(L, t) \\ \psi(L, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \\ C_3(t) \\ C_4(t) \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

Rovnici (3.5) lze zapsat kompaktně

$$\mathbf{q}_1(t) = \mathbf{S}_1 \mathbf{c}_1(t), \quad (3.6)$$

kde vektor $\mathbf{q}_1(t)$ je vektor popisující výchylky a natočení v krajních bodech prvku. Tyto krajní body se nazývají uzly diskretizace. Matice \mathbf{S}_1 je konstantní matice násadových koeficientů. Odsud lze vyjádřit vektor $\mathbf{c}_1(t)$ jako

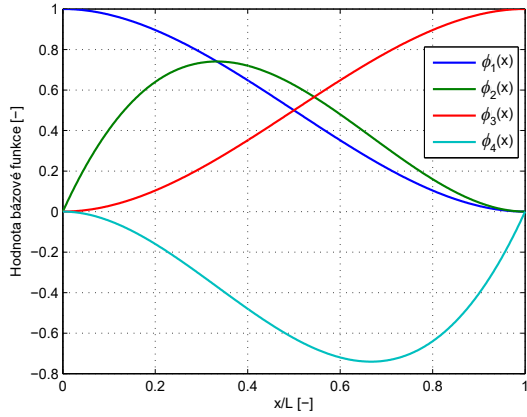
$$\mathbf{c}_1(t) = \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{q}_1(t). \quad (3.7)$$

Pokud dosadíme za vektor $\mathbf{c}_1(t)$ do vztahu (3.2), dostáváme

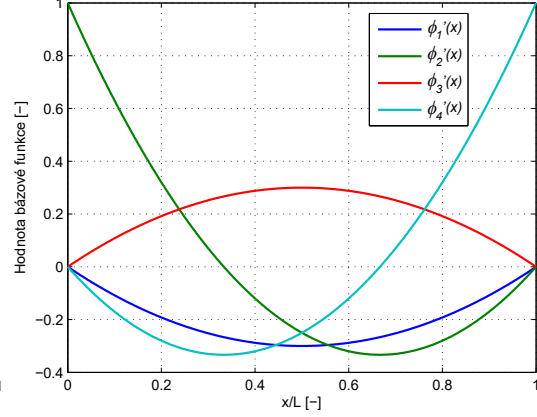
$$v(x, t) = \Phi^T(x) \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{q}_1(t) = \phi_1^T(x) \mathbf{q}_1(t), \quad (3.8)$$

kde vektor $\phi_1(x)$ je vektor báзовých funkcí a je vykreslený na Obr. 3.2. Jeho prvky nabývají hodnot

$$\phi_1^T(x) = \Phi^T(x) \mathbf{S}_1^{-1}, \quad (3.9)$$



Obrázek 3.2: Průběh bazových funkcí vektoru $\phi_1(x)$



Obrázek 3.3: Průběh bazových funkcí vektoru $\phi'_1(x)$

odtud dostáváme vektor bazových funkcí ve tvaru

$$\phi_1(x) = \begin{bmatrix} 1 - 3\frac{x^2}{L^2} + 2\frac{x^3}{L^3} \\ x - 2\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^3} \\ 3\frac{x^2}{L^2} - 2\frac{x^3}{L^3} \\ -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \\ \phi_3(x) \\ \phi_4(x) \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

Dosazením vztahu (3.8) do první rovnice z (3.1) získáme

$$\psi(x, t) = \Phi'^T(x) \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{q}_1(t) = \phi_1'^T(x) \mathbf{q}_1(t), \quad (3.11)$$

kde vektor $\phi_1'^T(x)$ je transponovaný a zderivovaný vektor bazových funkcí z (3.9) podle proměnné x . Průběh jednotlivých složek tohoto vektoru lze vidět na Obr. 3.3.

Obdobným způsobem lze vyjádřit posuv $w(x, t)$ a natočení $\vartheta(x, t)$. Zavedeme vektor popisující výchylky a natočení v krajních bodech uzlů hřídelového elementu

$$\mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} w(0, t) \\ \vartheta(0, t) \\ w(L, t) \\ \vartheta(L, t) \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

Výchylku lze znovu aproximovat polynomem třetího stupně

$$w(x, t) = \Phi^T(x) \mathbf{c}_2(t), \quad (3.13)$$

kde vektor $\mathbf{c}_2(t) = [C_5(t) \ C_6(t) \ C_7(t) \ C_8(t)]^T$ je vektor koeficientů a $\Phi(x)$ je shodný z rovnice 3.2. Respektováním minusového znaménka natočení ϑ ze vztahu (3.1) dostáváme

$$\vartheta(x, t) = -\Phi'^T(x) \mathbf{c}_2(t). \quad (3.14)$$

Aplikujeme znovu geometrické okrajové podmínky

$$\begin{aligned} w(0, t) &= C_5(t), \\ \vartheta(0, t) &= -C_6(t), \\ w(L, t) &= C_5(t) + C_6(t)L + C_7(t)L^2 + C_8(t)L^3, \\ \vartheta(L, t) &= -C_6(t) - 2C_7(t)L - 3C_8(t)L^2 \end{aligned} \quad (3.15)$$

a přepíšeme je do maticového tvaru

$$\begin{bmatrix} w(0, t) \\ \vartheta(0, t) \\ w(L, t) \\ \vartheta(L, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & -1 & -2L & -3L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_5(t) \\ C_6(t) \\ C_7(t) \\ C_8(t) \end{bmatrix}, \quad (3.16)$$

což lze zapsat jako

$$\mathbf{q}_2(t) = \mathbf{S}_2 \mathbf{c}_2(t), \quad (3.17)$$

kde matice \mathbf{S}_2 je již zmíněná matice násadových koeficientů. Vektor neznámých koeficientů $\mathbf{c}_2(t)$ vyjádříme jako

$$\mathbf{c}_2(t) = \mathbf{S}_2^{-1} \mathbf{q}_2(t). \quad (3.18)$$

Po dosazení $\mathbf{c}_2(t)$ do rovnice (3.13) dostaneme

$$w(x, t) = \Phi^T(x) \mathbf{S}_2^{-1} \mathbf{q}_2(t) = \phi_2^T(x) \mathbf{q}_2(t), \quad (3.19)$$

kde vektor $\phi_2(x)$ je vektor báзовých funkcí a jeho prvky nabývají hodnot

$$\phi_2^T(x) = \Phi^T(x) \mathbf{S}_2^{-1}, \quad (3.20)$$

a odtud

$$\phi_2(x) = \begin{bmatrix} 1 - 3\frac{x^2}{L^2} + 2\frac{x^3}{L^3} \\ -x + 2\frac{x^2}{L} - \frac{x^3}{L^3} \\ 3\frac{x^2}{L^2} - 2\frac{x^3}{L^3} \\ \frac{x^2}{L} - \frac{x^3}{L^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ -\phi_2(x) \\ \phi_3(x) \\ -\phi_4(x) \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

Pro vyjádření natočení ϑ pomocí vektoru báзовých funkcí dosadíme vektor $\mathbf{c}_2(t)$ do rovnice (3.14), čímž získáme

$$\vartheta(x, t) = -\Phi'^T(x) \mathbf{S}_2^{-1} \mathbf{q}_2(t) = -\phi'_2{}^T(x) \mathbf{q}_2(t). \quad (3.22)$$

Rovnice (3.8), (3.11), (3.19) a (3.22) popisují průběh výchylek a natočení pomocí uzlů v libovolném bodě hřídelového prvku. Pokud tyto vztahy seskupíme, tak lze psát [8]

$$\begin{bmatrix} v(x, t) \\ w(x, t) \end{bmatrix} = \Psi(x) \mathbf{q}^{(e)}(t), \quad \begin{bmatrix} \psi(x, t) \\ \vartheta(x, t) \end{bmatrix} = \Gamma(x) \mathbf{q}^{(e)}(t), \quad (3.23)$$

kde matice mají tvar

$$\begin{aligned} \Psi &= \begin{bmatrix} \Psi_v \\ \Psi_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & \phi_3 & 0 & 0 & \phi_4 \\ 0 & \phi_1 & -\phi_2 & 0 & 0 & \phi_3 & -\phi_4 & 0 \end{bmatrix}, \\ \Gamma &= \begin{bmatrix} \Gamma_\vartheta \\ \Gamma_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\phi'_1 & \phi'_2 & 0 & 0 & -\phi'_3 & \phi'_4 & 0 \\ \phi'_1 & 0 & 0 & \phi'_2 & \phi'_3 & 0 & 0 & \phi'_4 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.24)$$

a vektor výchylek elementu lze zapsat jako

$$\mathbf{q}^{(e)}(t) = \begin{bmatrix} v(0, t) \\ w(0, t) \\ \vartheta(0, t) \\ \psi(0, t) \\ v(L, t) \\ w(L, t) \\ \vartheta(L, t) \\ \psi(L, t) \end{bmatrix}. \quad (3.25)$$

3.1.1 Odvození matic pro hřídelový prvek

Pokud máme vztahy popisující výchylky a natočení (3.24) v libovolném bodě hřídelového prvku, můžeme vyjádřit kinetickou energii elementu o jednotkové délce [8]

$$dE_K = \frac{m}{2} (\dot{v}^2 + \dot{w}^2) + \frac{J}{2} (\dot{\vartheta}^2 + \dot{\psi}^2) + \frac{J_p}{2} (\omega_0 - 2\omega_0 \vartheta \dot{\psi}), \quad (3.26)$$

kde m je hmotnost, J kvadratický moment k příčným osám a J_p polární kvadratický moment

$$\begin{aligned} m &= \varrho \pi r^2, \\ J &= \frac{mr^2}{4}, \\ J_p &= \frac{mr^2}{2}, \end{aligned}$$

kde r a d jsou poloměr a průměr kruhového průřezu. Dosazením vztahů (3.23) a (3.24) do rovnice (3.26) získáme

$$\begin{aligned} dE_K &= \frac{m}{2} \left(\dot{\mathbf{q}}^{(e)T} \boldsymbol{\Psi}_v^T \boldsymbol{\Psi}_v \dot{\mathbf{q}}^{(e)} + \dot{\mathbf{q}}^{(e)T} \boldsymbol{\Psi}_w^T \boldsymbol{\Psi}_w \dot{\mathbf{q}}^{(e)} \right) + \frac{J}{2} \left(\dot{\mathbf{q}}^{(e)T} \boldsymbol{\Gamma}_\vartheta^T \boldsymbol{\Gamma}_\vartheta \dot{\mathbf{q}}^{(e)} + \dot{\mathbf{q}}^{(e)T} \boldsymbol{\Gamma}_\psi^T \boldsymbol{\Gamma}_\psi \dot{\mathbf{q}}^{(e)} \right) + \\ &+ \frac{J_p}{2} \omega_0^2 - J_p \omega_0 \mathbf{q}^{(e)T} \boldsymbol{\Gamma}_\vartheta^T \boldsymbol{\Gamma}_\psi \dot{\mathbf{q}}^{(e)}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

což lze upravit do tvaru

$$dE_K = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{q}}^{(e)T} \boldsymbol{\Psi}^T \boldsymbol{\Psi} \dot{\mathbf{q}}^{(e)} + \frac{J}{2} \dot{\mathbf{q}}^{(e)T} \boldsymbol{\Gamma}^T \boldsymbol{\Gamma} \dot{\mathbf{q}}^{(e)} - J_p \omega_0 \mathbf{q}^{(e)T} \boldsymbol{\Gamma}_\vartheta^T \boldsymbol{\Gamma}_\psi \dot{\mathbf{q}}^{(e)} + \frac{J_p}{2} \omega_0^2. \quad (3.28)$$

První člen této rovnice udává kinetickou energii od posuvného pohybu, druhý od pohybu rotačního, třetí od gyroskopických účinků a poslední od vlastní rotace kolem osy otáčení. Po integraci přes délku prvku L dostáváme

$$E_K = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^{(e)T} (\mathbf{M}_T + \mathbf{M}_R) \dot{\mathbf{q}}^{(e)} - \omega_0 \mathbf{q}^{(e)T} \mathbf{N} \dot{\mathbf{q}}^{(e)} + \frac{J_p}{2} \omega_0^2, \quad (3.29)$$

kde \mathbf{M}_T , \mathbf{M}_R a \mathbf{N} jsou matice

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_T &= \int_0^L m \boldsymbol{\Psi}^T \boldsymbol{\Psi} dx, \\ \mathbf{M}_R &= \int_0^L J \boldsymbol{\Gamma}^T \boldsymbol{\Gamma} dx, \\ \mathbf{N} &= \int_0^L J_p \boldsymbol{\Gamma}_\vartheta^T \boldsymbol{\Gamma}_\psi dx. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Obdobně vyjádříme potenciální energii elementu o jednotkové délce

$$dE_p = \frac{EI}{2} (v''^2 + w''^2) = \frac{EI}{2} \mathbf{q}^{(e)T} \boldsymbol{\Psi}''^T \boldsymbol{\Psi}'' \mathbf{q}^{(e)}, \quad (3.31)$$

kde I je kvadratický moment kruhového průřezu

$$I = \frac{\pi d^4}{64}.$$

Po integraci přes celou délku elementu dostaneme

$$E_p = \frac{1}{2} \mathbf{q}^{(e)T} \mathbf{K} \mathbf{q}^{(e)}, \quad (3.32)$$

kde \mathbf{K}_e je matice tuhosti elementu

$$\mathbf{K}_e = \int_0^L EI \boldsymbol{\Psi}''^T \boldsymbol{\Psi}'' dx. \quad (3.33)$$

Aplikací Lagrangeových rovnic druhého druhu (2.1) a za předpokladu konstantní úhlové rychlosti ω_0 můžeme psát výslednou pohybovou rovnici v maticovém tvaru

$$\mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{q}}^{(e)} + \omega_0 \mathbf{G}_e \dot{\mathbf{q}}^{(e)} + \mathbf{K}_e \mathbf{q}^{(e)} = \mathbf{0}, \quad (3.34)$$

kde $\mathbf{M}_e = \mathbf{M}_T + \mathbf{M}_R$ je matice hmotnosti elementu, $\mathbf{G}_e = \mathbf{N} - \mathbf{N}^T$ antisymetrická matice gyroskopických účinků elementu a \mathbf{K}_e matice tuhosti elementu. Jednotlivé matice mají tvar

$$\mathbf{M}_T = \frac{mL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & 22L & 54 & 0 & 0 & -13L \\ 0 & 156 & -22L & 0 & 0 & 54 & 13L & 0 \\ 0 & -22L & 4L^2 & 0 & 0 & -13L & -3L^2 & 0 \\ 22L & 0 & 0 & 4L^2 & 13L & 0 & 0 & -3L^2 \\ 54 & 0 & 0 & 13L & 156 & 0 & 0 & -22L \\ 0 & 54 & -13L & 0 & 0 & 156 & 22L & 0 \\ 0 & 13L & -3L^2 & 0 & 0 & 22L & 4L^2 & 0 \\ -13L & 0 & 0 & -3L^2 & -22L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_R &= \frac{J}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & 3L & -36 & 0 & 0 & 3L \\ 0 & 36 & -3L & 0 & 0 & -36 & -3L & 0 \\ 0 & -3L & 4L^2 & 0 & 0 & 3L & -L^2 & 0 \\ 3L & 0 & 0 & 4L^2 & -3L & 0 & 0 & -L^2 \\ -36 & 0 & 0 & -3L & 36 & 0 & 0 & -3L \\ 0 & -36 & 3L & 0 & 0 & 36 & 3L & 0 \\ 0 & -3L & -L^2 & 0 & 0 & 3L & 4L^2 & 0 \\ 3L & 0 & 0 & -L^2 & -3L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{G}_e &= \frac{J_p}{30L} \begin{bmatrix} 0 & 36 & -3L & 0 & 0 & -36 & -3L & 0 \\ -36 & 0 & 0 & -3L & 36 & 0 & 0 & -3L \\ 3L & 0 & 0 & 4L^2 & -3L & 0 & 0 & -L^2 \\ 0 & 3L & -4L^2 & 0 & 0 & -3L & L^2 & 0 \\ 0 & -36 & 3L & 0 & 0 & 36 & 3L & 0 \\ 36 & 0 & 0 & 3L & -36 & 0 & 0 & 3L \\ 3L & 0 & 0 & -L^2 & -3L & 0 & 0 & 4L^2 \\ 0 & 3L & L^2 & 0 & 0 & -3L & -4L^2 & 0 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{K}_e &= \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 6L & -12 & 0 & 0 & 6L \\ 0 & 12 & -6L & 0 & 0 & -12 & -6L & 0 \\ 0 & -6L & 4L^2 & 0 & 0 & 6L & 2L^2 & 0 \\ 6L & 0 & 0 & 4L^2 & -6L & 0 & 0 & 2L^2 \\ -12 & 0 & 0 & -6L & 12 & 0 & 0 & -6L \\ 0 & -12 & 6L & 0 & 0 & 12 & 6L & 0 \\ 0 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 & 6L & 4L^2 & 0 \\ 6L & 0 & 0 & 2L^2 & -6L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

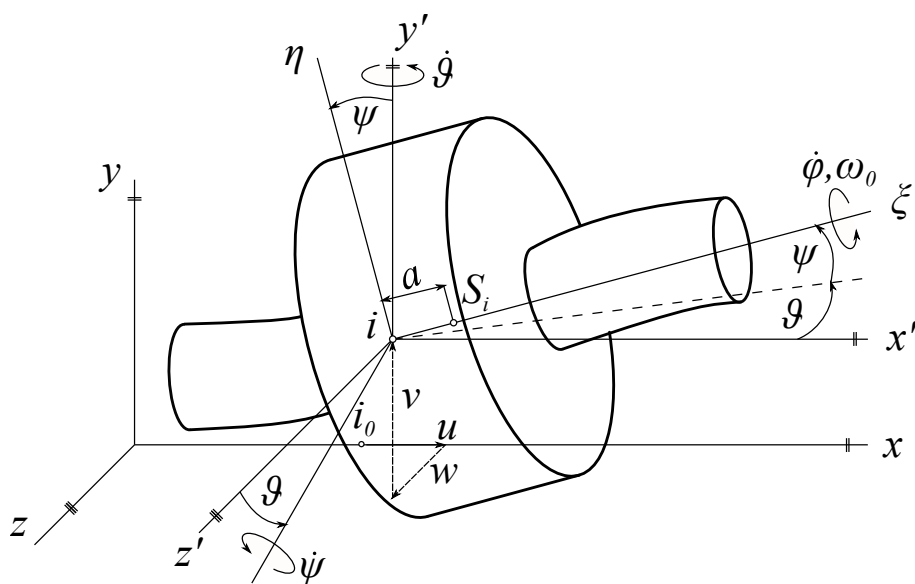
3.2 Matematický model tuhého kotouče

V této části je provedeno odvození matice tuhého rotačně symetrického kotouče v pevném souřadnicovém systému nasazeného centricky, kolmo a pevně na hřídeli v uzlovém bodě i . Střed hmotnosti kotouče však nemusí ležet přímo v uzlovém bodě, ale obecně může být od uzlového bodu vychýlen o vzdálenost a ve směru osy rotace, viz Obr. 3.4. Pro odvození uvažujme uzel se 6 stupni volnosti $\mathbf{q}_i^d(t) = [u, v, \psi, w, \vartheta, \varphi]^T$. Kinetickou energii lze vyjádřit základním rozkladem jako součet kinetické energie od unášivého posuvného a relativního rotačního pohybu

$$E_k = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_S^T \mathbf{v}_S + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}, \quad (3.35)$$

kde m je hmotnost kotouče a matice \mathbf{I} je diagonální matice setrvačnosti kotouče v rotujícím souřadnicovém systému $\xi\eta\zeta$

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}. \quad (3.36)$$



Obrázek 3.4: Kotoučový prvek

Za předpokladu malých úhlů natočení ϑ a ψ lze psát rychlost unášivého pohybu \mathbf{v}_S v souřadnicovém systému xyz

$$\mathbf{v}_S(t) = \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} + a\dot{\psi} \\ \dot{w} - a\dot{\vartheta} \end{bmatrix}. \quad (3.37)$$

Relativní pohyb je vyjádřen v souřadnicovém systému $\xi\eta\zeta$ vektorem úhlové rychlosti

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \begin{bmatrix} \omega_0 + \dot{\varphi} + \dot{\vartheta} \sin \psi \\ \dot{\vartheta} \cos \psi \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}. \quad (3.38)$$

Po zjednodušení uvažováním malých úhlů ϑ , ψ a $\dot{\varphi} \ll \omega_0$ můžeme přepsat vztah (3.38) do tvaru

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \begin{bmatrix} \omega_0 + \dot{\varphi} + \dot{\vartheta}\psi \\ \dot{\vartheta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}. \quad (3.39)$$

Po dosazení (3.36), (3.37) a (3.39) do vztahu kinetické energie (3.35) dostaneme

$$E_k = \frac{1}{2}m \left[\dot{u}^2 + \left(\dot{v} + a\dot{\psi} \right)^2 + \left(\dot{w} - a\dot{\vartheta} \right)^2 \right] + \frac{1}{2}I_0 \left(\omega_0 + \dot{\varphi} + \dot{\vartheta}\psi \right)^2 + \frac{1}{2}I\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\psi}^2. \quad (3.40)$$

Úpravou výrazu $\left(\omega_0 + \dot{\varphi} + \dot{\vartheta}\psi \right)$ na tvar $(\omega_0 + \dot{\varphi})^2 + 2\omega_0\dot{\vartheta}\psi$, jenž zachovává linearitu modelu, a z ekvivalence Lagrangeových rovnic druhého druhu s pravou stranou výrazu

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i^d} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial \mathbf{q}_i^d} = \mathbf{M}_k \ddot{\mathbf{q}}_i^d + \omega_0 \mathbf{G}_k \dot{\mathbf{q}}_i^d, \quad (3.41)$$

získáme matici hmotnosti kotouče \mathbf{M}_k a matici gyrokopických účinků \mathbf{G}_k ve tvaru

$$\mathbf{M}_k = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & ma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ma & I + ma^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & -ma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -ma & I + ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G}_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -I_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tento model je odvozen pro 6 stupňů volnosti v systému souřadnic s vektorem \mathbf{q}_i^d . Matice však lze snadno transformovat do systému souřadnic se 4 stupni volnosti $\mathbf{q}_i = [v_i, w_i, \vartheta_i, \psi_i]^T$ používaného k odvození prvku se spojitě rozloženou hmotností v předchozí části textu. Transformační vztah lze vyjádřit jako

$$\mathbf{q}_i^d = \mathbf{P} \mathbf{q}_i, \quad (3.42)$$

kde P se nazývá transformační (permutační) matice a má tvar

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matici hmotnosti, resp. gyroskopických účinků, můžeme odvodit pomocí transformační matice

$$M_k^i = P^T M_k P, \quad (3.43)$$

resp.

$$G_k^i = P^T G_k P. \quad (3.44)$$

Dostáváme tak výsledné matice pro model v konfiguračním prostoru popsaném zobecněnými souřadnicemi i -tého uzlu diskretizace hřídele

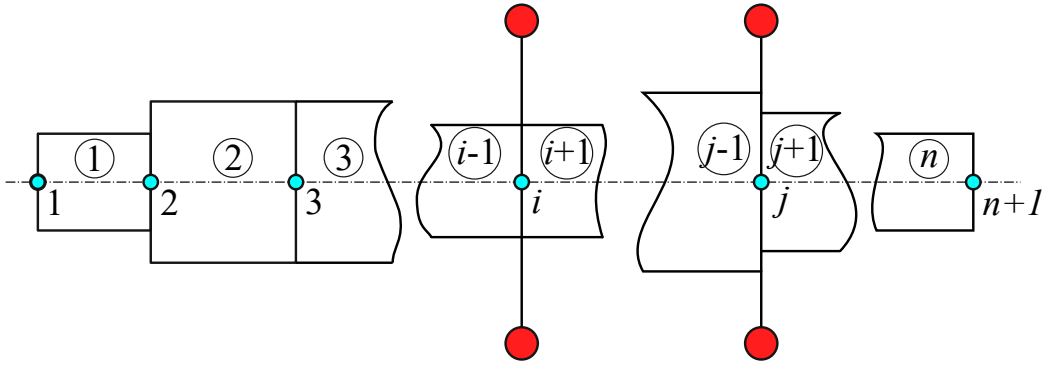
$$M_k^i = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & ma \\ 0 & m & -ma & 0 \\ 0 & -ma & I + ma^2 & 0 \\ ma & 0 & 0 & I + ma^2 \end{bmatrix},$$

$$G_k^i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_0 \\ 0 & 0 & -I_0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.3 Matematický model rotoru s pevně nasazenými kotouči

V předchozích částech textu byly sestaveny matematické modely pro hřídelový prvek, jakožto prvek se spojitě rozloženou hmotností, a prvek kotouče, jakožto tuhého symetrického tělesa. Pro sestavení matematického modelu rotoru, který se skládá z hřídele a na něm pevně nasazených kotoučů je zapotřebí sestavit globální matice hřídelových prvků a kotoučů.

Hřídel je potřeba diskretizovat na konečný počet prvků. Diskretizaci je vhodné provádět v místech změn průřezů hřídele nebo připojení diskrétních prvků. Z praktického hlediska je pro lepší zachycení ohybu dlouhých částí prizmatického hřídele



Obrázek 3.5: Diskretizovaný model hřídele na n prvků s kotouči nasazenými v i -tém a j -tém uzlu. Prvky jsou znázorněny číslem v kroužku, uzly tyrkysovými kruhy a kotouče červenými kruhy.

vhodné rozdělit tyto úseky na více prvků. Každý z prvků je reprezentován uzlem, jenž určuje polohu příslušných matic v globálních maticích.

Uvažujme obecně hřídel diskretizovaný na n prvků. Diskretizací hřídele na n prvků vznikne $n + 1$ uzlů. Výchytky a natočení v i -tém uzlu popisuje vektor zobecněných souřadnic uzlu $\mathbf{q}_i = [v_i, w_i, \vartheta_i, \psi_i]^T$. Dále mějme v i -tém a j -tém uzlu nasazené rotačně symetrické kotouče. Takto diskretizovaný hřídel je zakreslen na Obr. 3.5.

Globální matici hřídelových prvků sestavíme postupem znázorněným na Obr. 3.6, kde čtvercové bloky představují matice elementů vyjádřených v kapitole 3.2. Na pozicích, kde se matice elementů překrývají (vyjádřeno na Obr. 3.6 šedivou barvou) dochází k součtu prvků na příslušných pozicích. Tímto způsobem sestavíme globální matice hmotnosti, tuhosti a gyroskopických účinků hřídelových prvků, které označíme postupně $\mathbf{M}^{(s)}$, $\mathbf{K}^{(s)}$ a $\mathbf{G}^{(s)}$.

$$\mathbf{X}_i = \begin{bmatrix} \text{block 1} & & & \\ & \text{block 2} & & \\ & & \text{block 3} & \\ & & & \ddots \\ & & & & \text{block } n \end{bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \\ \mathbf{q}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{q}_n \\ \mathbf{q}_{n+1} \end{matrix} \quad \mathbf{X}_i = \mathbf{M}^{(s)}, \mathbf{G}^{(s)}, \mathbf{K}^{(s)}$$

Obrázek 3.6: Konstrukce globální matice hřídelových prvků

$$X_i = \begin{bmatrix} & & & \\ & \text{yellow square} & & \\ & & & \\ & & \text{yellow square} & \\ & & & \end{bmatrix} \begin{matrix} \vdots \\ \} \mathbf{q}_i \\ \vdots \\ \} \mathbf{q}_j \\ \vdots \end{matrix} \quad X_i = \mathbf{M}^{(d)} \mathbf{G}^{(d)}$$

Obrázek 3.7: Konstrukce globální matice tuhých kotoučů

Dále sestavíme globální matice hmotnosti a gyroskopických účinků pro tuhé kotouče, které označíme $\mathbf{M}^{(d)}$ a $\mathbf{G}^{(d)}$. Matice tuhých kotoučů jsou vloženy do globálních matic na pozicích odpovídajícím uzlům, ve kterých jsou kotouče nasazeny, viz Obr. 3.7.

Pokud máme vytvořeny globální matice hřídelových prvků a tuhých kotoučů, tak výsledné globální matice soustavy můžeme zapsat jako

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbf{M}^{(s)} + \mathbf{M}^{(d)}, \\ \mathbf{G} &= \mathbf{G}^{(s)} + \mathbf{G}^{(d)}, \\ \mathbf{K} &= \mathbf{K}^{(s)}, \end{aligned}$$

kde matice $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{4(n+1), 4(n+1)}$, $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{4(n+1), 4(n+1)}$ a $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{4(n+1), 4(n+1)}$ jsou postupně globální matice hmotnosti, gyroskopických účinků a tuhosti rotoru. Výsledný matematický model rotoru bez uvažování tlumení můžeme napsat ve tvaru

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \omega_0 \mathbf{G}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad (3.45)$$

kde ω_0 je konstantní úhlová rychlost otáčení hřídele a \mathbf{q} představuje vektor zobecněných souřadnic všech uzlů modelu rotoru

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{q}_{n+1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4(n+1)}. \quad (3.46)$$

Kapitola 4

Matematické modelování ložisek

Uložení rotoru v pevné části (statoru) jsou zprostředkována pomocí ložisek. Existují různé typy ložisek, kde o typu použitého ložiska v praxi rozhoduje daná aplikace. Mezi nejrozšířenější ložiska patří ložiska valivá a kluzná [7]. V této kapitole budou odvozeny matematické modely ložisek s izotropními kluznými ložisky a modely ložisek s plovoucím pouzdrům. Dále bude pozornost soustředěna na sestavení matematických modelů rotorů s uvažováním zmíněných typů ložisek.

4.1 Matematický model izotropního kluzného ložiska

Kluzná ložiska mají v dynamice rotorů časté využití. Jejich modelování a analýza však není triviální a přesahuje rámec této bakalářské práce. Odvození základních matematických modelů kluzných ložisek lze najít například v [10]. Kluzné ložisko se skládá z rotujícího čepu (hřídele) uloženého v olejovém filmu uvnitř ložiskového pouzdra. Na rotující čep působí díky přítomnosti olejového filmu nelineární hydrodynamické síly.

Pro matematický popis kluzného ložiska předpokládejme zjednodušený linealizovaný maticový model zanedbávající hmotnost a setrvačné síly olejového filmu. Tento obecně anizotropní model popisuje hydrodynamické síly, které působí na hřídel nepříliš vychýlený z necentrické statické polohy a které lze psát v pevném souřadnicovém systému ve tvaru [7]

$$\begin{bmatrix} f_y \\ f_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{yy} & b_{yz} \\ b_{zy} & b_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v}_i \\ \dot{w}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ w_i \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

kde koeficienty b_{ij} a k_{ij} jsou tlumící a tuhostní koeficienty olejového filmu

(ložiska) a jsou stanoveny z rovnic hydrodynamické teorie, zvláště Euler-Navier-Stokesových rovnic doplněných rovnicemi termodynamické rovnováhy [7]. Koeficienty jsou závislé zejména na geometrických parametrech komponent ložiska, na viskozitě olejového filmu, na rychlosti otáčení hřídele a na zatížení hřídele, které je daným ložiskem přenášeno [11].

Pokud budeme navíc uvažovat izotropní model ložisek, přejde vztah (4.1) do tvaru

$$\begin{bmatrix} f_y \\ f_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v}_i \\ \dot{w}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ w_i \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

kde b a k jsou tlumicí a tuhostní koeficienty izotropního kluzného ložiska.

Tento model ložisek byl použit v testovacích příkladech a slouží jako první přiblížení modelu ložisek pro experimentální zařízení RotorKit, kde se vyskytují kluzná samomazná ložiska.

4.2 Matematický model hřídele uloženého na izotropních kluzných ložiskách

Model ložisek (4.2) je vyjádřen v konfiguračním prostoru, který je definován příčnými výchylkami uzlu hřídele, v němž je ložisko nasazeno. V souladu s již zde odvozenými modely lze model ložiskových sil (4.2) vyjádřit v konfiguračním prostoru, který je dán zobecněnými souřadnicemi i -tého uzlu diskretizace soustavy, tj. $\mathbf{q}_i = [v_i, w_i, \vartheta_i, \psi_i]^T$. Matice tuhosti a tlumení izotropních kluzných ložisek v i -tém uzlu mají v tomto konfiguračním prostoru tvar

$$\mathbf{K}_{Li}^i = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{Li}^i = \begin{bmatrix} b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

Předpokládejme ložiska umístěná v i -tém a j -tém uzlu diskretizovaného hřídele. Sestavení globální matice tuhosti a tlumení izotropních kluzných ložisek \mathbf{K}_L a \mathbf{B}_L pak probíhá obdobným způsobem jako u sestavování globálních matic tuhých kotoučů. Tento postup je zobrazen na Obr. 3.7. Matice tuhosti a tlumení izotropních ložisek jsou vloženy do příslušných globálních matic na pozicích odpovídajícím uzlům, ve kterých se ložiska vyskytují. Výslednou matici tuhosti rotorové soustavy \mathbf{K} zahrnující matice ložisek pak vyjádříme jako

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}^{(s)} + \mathbf{K}_L, \quad (4.4)$$

kde $\mathbf{K}^{(s)}$ představuje globální matici tuhosti hřídelových prvků odvozenou v kapitole 3.3. Matice \mathbf{K}_L je globální matice tuhosti izotropních kluzných ložisek.

Výsledný matematický model rotorové soustavy pak můžeme zapsat následovně

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{B}_L + \omega_0 \mathbf{G}\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad (4.5)$$

kde \mathbf{q} představuje vektor zobecněných souřadnic rotorové soustavy (3.46), který je daný diskretizací hřídele.

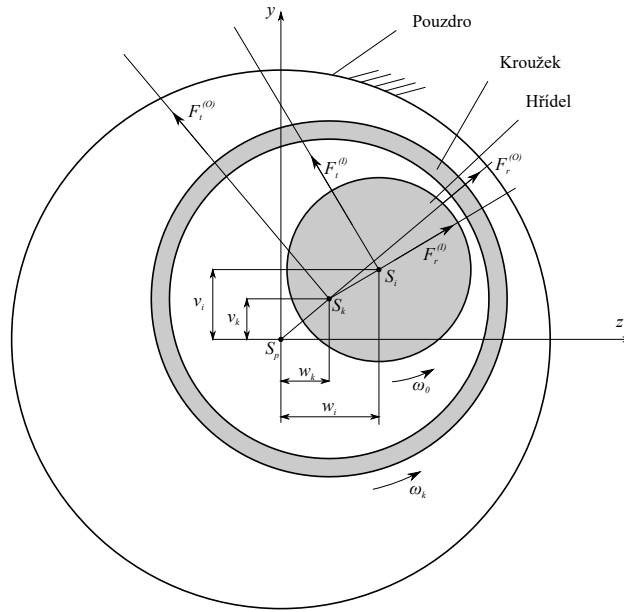
V testovacích příkladech není uvažován vliv tlumení olejového filmu, proto výraz (4.5) upravíme do tvaru, ve kterém zanedbáme globální matici tlumení izotropních kluzných ložisek \mathbf{B}_L

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \omega_0 \mathbf{G}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0}. \quad (4.6)$$

4.3 Matematický model ložiska s plovoucím pouz-drem

Ložiska s plovoucím pouzdrům jsou obvykle využita u automobilových turbodmychadel, protože dovolují provozovat rotor na relativně vysokých provozních otáčkách. Ložisko s plovoucím pouzdrům se skládá z nehybného pouzdra, jež je součástí skříně stroje, a rotujícího pouzdra (kroužku), uvnitř kterého se nachází rotující hřídel (Obr. 4.1). Mezi kroužkem a pouzdrům, resp. hřídelem a kroužkem se nachází vnější, resp. vnitřní olejový film. Oběma olejovými filmy se přenáší síly, jenž se dají vyjádřit rozkladem na tečný F_t a radiální směr F_r . Síly přenášené vnějším a vnitřním olejovým filmem jsou značeny horním indexem (O) a (I).

Pro odvození maticového modelu ložiska s plovoucím pouzdrům uvažujeme stejné předpoklady jako v případě kluzného ložiska. Opět předpokládáme hřídel nepřilíš vychýlený ze statické rovnovážné polohy. Hmotnost a setrvačné účinky olejových filmů jsou zanedbány. Hydrodynamické síly, které působí na hřídel, pak můžeme za předpokladu jejich linearizace vyjádřit v pevném souřadnicovém systému ve tvaru [11]



Obrázek 4.1: Ložiskové síly v modelu ložiska s plovoucím pouzdrům

$$\begin{bmatrix} f_y^{(I)} \\ f_z^{(I)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{yy}^{(I)}(\omega) & b_{yz}^{(I)}(\omega) \\ b_{zy}^{(I)}(\omega) & b_{zz}^{(I)}(\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v}_i - \dot{v}_k \\ \dot{w}_i - \dot{w}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{yy}^{(I)}(\omega) & k_{yz}^{(I)}(\omega) \\ k_{zy}^{(I)}(\omega) & k_{zz}^{(I)}(\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i - v_k \\ w_i - w_k \end{bmatrix}, \quad (4.7)$$

kde v_i a w_i jsou výchylky středu hřídele i -tého uzlu v osách y a z . Souřadnice v_k a w_k udávají výchylku středu kroužku ložiska v téže osách. Tlumící a tuhostní koeficienty $b_{ij}^{(I)}$ a $k_{ij}^{(I)}$ olejového filmu mohou být vypočteny opět z rovnic hydrodynamické teorie.

Dále můžeme vyjádřit linearizované hydrodynamické síly, které působí na kroužek, v obdobném tvaru

$$\begin{bmatrix} f_y^{(O)} \\ f_z^{(O)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{yy}^{(O)}(\omega) & b_{yz}^{(O)}(\omega) \\ b_{zy}^{(O)}(\omega) & b_{zz}^{(O)}(\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v}_k \\ \dot{w}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{yy}^{(O)}(\omega) & k_{yz}^{(O)}(\omega) \\ k_{zy}^{(O)}(\omega) & k_{zz}^{(O)}(\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_k \\ w_k \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

Jelikož se v modelu objevuje rotující kroužek ložiska, jenž může také konat příčné výchylky v rovině yz , rozroste se model každým ložiskem o 2 stupně volnosti v_k, w_k charakterizující posun středu kroužku ložiska v této rovině. Hmotnost krou-

žku je ve výsledném modelu vyjádřena diagonální maticí $\mathbf{M}_k^i = \text{diag}(m_k, m_k)$ na příslušných pozicích v globální matici.

Linearizovaný vektor sil kluzného ložiska lze s uvažováním rovnic (4.7) a (4.8) vyjádřit podle Obr. 4.1 ve tvaru [11]

$$\mathbf{f}_{Li} = \begin{bmatrix} -f_y^{(I)} \\ -f_z^{(I)} \\ f_y^{(I)} - f_y^{(O)} \\ f_z^{(I)} - f_z^{(O)} \end{bmatrix} = -\mathbf{B}_{Li}(\omega) \begin{bmatrix} \dot{v}_i \\ \dot{w}_i \\ \dot{v}_k \\ \dot{w}_k \end{bmatrix} - \mathbf{K}_{Li}(\omega) \begin{bmatrix} v_i \\ w_i \\ v_k \\ w_k \end{bmatrix}, \quad (4.9)$$

jelikož na Obr. 4.1 síly vyjadřují účinky vnitřních olejových filmů na kroužek a vnějších olejových filmů na pánev. Matice $\mathbf{B}_{Li}(\omega)$ představuje matici tlumení ložiska a má následující tvar

$$\mathbf{B}_{Li}(\omega) = \begin{bmatrix} b_{yy}^{(I)} & b_{yz}^{(I)} & -b_{yy}^{(I)} & -b_{yz}^{(I)} \\ b_{zy}^{(I)} & b_{zz}^{(I)} & -b_{zy}^{(I)} & -b_{zz}^{(I)} \\ -b_{yy}^{(I)} & -b_{yz}^{(I)} & b_{yy}^{(O)} + k_{yy}^{(I)} & b_{yz}^{(O)} + b_{yz}^{(I)} \\ -b_{zy}^{(I)} & -b_{zz}^{(I)} & b_{zy}^{(O)} + k_{zy}^{(I)} & b_{zz}^{(O)} + b_{zz}^{(I)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{L11}^i & \mathbf{B}_{L12}^i \\ \mathbf{B}_{L21}^i & \mathbf{B}_{L22}^i \end{bmatrix}, \quad (4.10)$$

a matice tuhosti ložiska $\mathbf{K}_{Li}(\omega)$ pak

$$\mathbf{K}_{Li}(\omega) = \begin{bmatrix} k_{yy}^{(I)} & k_{yz}^{(I)} & -k_{yy}^{(I)} & -k_{yz}^{(I)} \\ k_{zy}^{(I)} & k_{zz}^{(I)} & -k_{zy}^{(I)} & -k_{zz}^{(I)} \\ -k_{yy}^{(I)} & -k_{yz}^{(I)} & k_{yy}^{(O)} + k_{yy}^{(I)} & k_{yz}^{(O)} + k_{yz}^{(I)} \\ -k_{zy}^{(I)} & -k_{zz}^{(I)} & k_{zy}^{(O)} + k_{zy}^{(I)} & k_{zz}^{(O)} + k_{zz}^{(I)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{L11}^i & \mathbf{K}_{L12}^i \\ \mathbf{K}_{L21}^i & \mathbf{K}_{L22}^i \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

Submatice $\mathbf{K}_{L11}^i, \mathbf{K}_{L12}^i, \mathbf{K}_{L21}^i, \mathbf{K}_{L22}^i$ jsou čtvercové matice 2x2 ve tvaru

$$\mathbf{K}_{L11}^i = \begin{bmatrix} k_{yy}^{(I)} & k_{yz}^{(I)} \\ k_{zy}^{(I)} & k_{zz}^{(I)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_{L12}^i = \begin{bmatrix} -k_{yy}^{(I)} & -k_{yz}^{(I)} \\ -k_{zy}^{(I)} & -k_{zz}^{(I)} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}_{L21}^i = \begin{bmatrix} -k_{yy}^{(I)} & -k_{yz}^{(I)} \\ -k_{zy}^{(I)} & -k_{zz}^{(I)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_{L22}^i = \begin{bmatrix} k_{yy}^{(O)} + k_{yy}^{(I)} & k_{yz}^{(O)} + k_{yz}^{(I)} \\ k_{zy}^{(O)} + k_{zy}^{(I)} & k_{zz}^{(O)} + k_{zz}^{(I)} \end{bmatrix}.$$

Submatice $\mathbf{B}_{L11}^i, \mathbf{B}_{L12}^i, \mathbf{B}_{L21}^i, \mathbf{B}_{L22}^i$ mají analogický tvar k maticím $\mathbf{K}_{L11}^i, \mathbf{K}_{L12}^i, \mathbf{K}_{L21}^i, \mathbf{K}_{L22}^i$.

4.4 Matematický model hřídele uloženého na ložiskách s plovoucími pouzdry

Pro vytvoření matematického modelu hřídele uloženého na ložiskách s plovoucími pouzdry využijeme odvozené matice tuhosti a tlumení ložiska z kapitoly 4.3. Jak již bylo zmíněno v kapitole 4.3, každým kluzným ložiskem se vektor zobecněných souřadnic systému \mathbf{q} (3.46) rozšíří o 2 stupně volnosti zahrnutím příčných výchylek středu kroužku ložiska. Uvažujme 2 ložiska s plovoucími pouzdry nasazená v i -tém a j -tém uzlu hřídele, které označíme indexy a a b . Proto zavedme nový vektor zobecněných souřadnic $\hat{\mathbf{q}}$ ve tvaru

$$\hat{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{q}_k^a \\ \mathbf{q}_k^b \end{bmatrix}, \quad (4.12)$$

vektor $\hat{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{4(n+1)+2m}$, kde m udává počet ložisek s plovoucími pouzdry, v našem případě tedy $m = 2$. Vektor \mathbf{q} je vektor zobecněných souřadnic rotoru a vektory \mathbf{q}_k^a a \mathbf{q}_k^b vyjadřují příčné výchylky středu kroužku kluzného ložiska u ložiska nasazeného v i -tém a j -tém uzlu.

V tomto novém konfiguračním systému vyjádříme globální matici hmotnosti ložisek, do které přispívají svými hmotnostmi kroužky kluzných ložisek.

$$\mathbf{M}_L = \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{M}_k^a \\ & & & \mathbf{M}_k^b \end{bmatrix} \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \} \mathbf{q}_k^a \\ \} \mathbf{q}_k^b \end{matrix},$$

kde matice $\mathbf{M}_k^a = \text{diag}(m_k^a, m_k^a)$ a $\mathbf{M}_k^b = \text{diag}(m_k^b, m_k^b)$ jsou diagonální matice řádu 2 a vyjadřují hmotnosti kroužků jednotlivých ložisek.

Globální matice tuhosti ložisek s plovoucími pouzdry byly vytvořeny pomocí matic odvozených v kapitole 4.3 následujícím způsobem

$$K_L(\omega) = \begin{bmatrix} \ddots & & & & & \\ & K_{L11}^a & & & K_{L12}^a & \\ & & \ddots & & & \\ & & & K_{L11}^b & & K_{L12}^b \\ & & & & \ddots & \\ & K_{L21}^a & & & & K_{L22}^a \\ & & & K_{L21}^b & & K_{L22}^b \end{bmatrix} \begin{matrix} \vdots \\ \} q_i \\ \vdots \\ \} q_j \\ \vdots \\ \} q_k^a \\ \} q_k^b \end{matrix}.$$

Globální matice tlumení ložisek s plovoucími pouzdry $B_L(\omega)$ je vyjádřena analogicky.

Z důvodu rozšíření konfiguračního prostoru o 4 souřadnice musí být rozšířené také globální matice hmotnosti, tuhosti a gyroskopických účinků v modelu rotoru s pevně nasazenými kotouči. Toho docílíme rozšířením matic nulovými maticemi. Pokud označíme rozšířené matice jako \tilde{M} , \tilde{G} a \tilde{K} můžeme psát

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{G} = \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{K} = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Když máme všechny globální matice vyjádřené v jednom konfiguračním systému, tak je můžeme bez problému sečíst. Můžeme psát výsledný matematický model rotorové soustavy s ložisky s plovoucími pouzdry

$$\left(\tilde{M} + M_L \right) \ddot{\hat{q}} + \left(\omega_0 \tilde{G} + B_L(\omega) \right) \dot{\hat{q}} + \left(\tilde{K} + K_L(\omega) \right) \hat{q} = 0. \quad (4.13)$$

V případě, že v předchozím vztahu nebude uvažováno tlumení, dostáváme globální systém ve tvaru

$$\left(\tilde{M} + M_L \right) \ddot{\hat{q}} + \omega_0 \tilde{G} \dot{\hat{q}} + \left(\tilde{K} + K_L(\omega) \right) \hat{q} = 0. \quad (4.14)$$

Matematické modely rotorových soustav ve tvaru (4.13), (4.14) popisují volné kmitání a jsou použitelné pro stanovení modálních vlastností soustavy.

Kapitola 5

Modální analýza rotujících soustav

Mezi základní úlohy dynamiky se řadí modální analýza. Cílem modální analýzy je určení modálních vlastností mechanické soustavy, tedy vlastních frekvencí a vlastních tvarů kmitů. Dále bude ukázán obecný postup pro určování modálních vlastností mechanických soustav.

Uvažujme lineární mechanickou soustavu ve tvaru (4.5). Postup je však totožný pro kteroukoli mechanickou soustavu odvozenou v této bakalářské práci. Vlastní hodnoty takové soustavy je vhodné řešit v tzv. stavovém prostoru [9], který je definován stavovým vektorem ve tvaru

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) \end{bmatrix}. \quad (5.1)$$

Derivací tohoto vztahu dostaneme

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}(t) \\ \ddot{\mathbf{q}}(t) \end{bmatrix}. \quad (5.2)$$

Pro převod matematického modelu (4.5) do stavového prostoru je zapotřebí matematický model rozšířit o identitu

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}(t) - \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{0}.$$

Získáváme pak soustavu ve tvaru

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}(t) - \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}(t) &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{B}_L + \omega_0 \mathbf{G}\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{K}\mathbf{q} &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

Soustavu (5.3) převedeme do maticového tvaru

$$\underbrace{\begin{bmatrix} M & 0 \\ B_L + \omega_0 G & M \end{bmatrix}}_N \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{q}(t) \\ \ddot{q}(t) \end{bmatrix}}_{\dot{u}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -M \\ K & 0 \end{bmatrix}}_P \underbrace{\begin{bmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{bmatrix}}_{u(t)} = 0. \quad (5.4)$$

Tato soustava se dá zapsat ve tvaru

$$N\dot{u}(t) + Pu(t) = 0. \quad (5.5)$$

Odtud lze vyjádřit

$$\dot{u}(t) = -N^{-1}Pu(t). \quad (5.6)$$

Tento výraz můžeme přepsat do tvaru

$$\dot{u}(t) = Au(t), \quad (5.7)$$

kde $A = -N^{-1}P$ se nazývá systémová matice a má následující strukturu

$$A = - \begin{bmatrix} 0 & -E \\ M^{-1}K & M^{-1}(B_L + \omega_0 G) \end{bmatrix}, \quad (5.8)$$

kde E je jednotková matice. Pro případ, kdy není uvažováno tlumení má systémová matice tvar

$$A = - \begin{bmatrix} 0 & -E \\ M^{-1}K & M^{-1}\omega_0 G \end{bmatrix}. \quad (5.9)$$

Rovnici (5.7) vyhovuje řešení ve tvaru

$$u(t) = ue^{\lambda t}. \quad (5.10)$$

Derivací tohoto vztahu a dosazením zpět do (5.7) získáváme rovnost

$$(\lambda E - A)u = 0. \quad (5.11)$$

Rovnice (5.11) představuje problém vlastních čísel systémové matice A . Netriviální řešení rovnice (5.7) existuje právě tehdy, když je příslušný determinant roven nule, tj pro

$$\det(\lambda E - A) = 0. \quad (5.12)$$

Při předpokladu, že má soustava rozšířená o identitu (5.3) $2n$ stupňů volnosti, získáme z (5.12) výpočtem $2n$ vlastních čísel, která mohou být komplexně sdružená

$$\lambda_\nu = \alpha_\nu \pm i\beta_\nu, \quad \nu = 1, \dots, m, \quad (5.13)$$

kde α_ν a β_ν vyjadřují reálnou a imaginární část těchto vlastních čísel a i značí imaginární jednotku. Vlastní čísla mohou také být reálná

$$\lambda_\nu = \alpha_\nu, \quad \nu = 2m + 1, 2m + 2, \dots, 2n. \quad (5.14)$$

Pro praktické účely je vhodné získané vlastní frekvence seřadit. Prvních m vlastních čísel s kladnou imaginární částí β_ν seřadíme podle velikosti $0 \leq \beta_\nu \leq \dots \leq \beta_n$. K nim komplexně sdružená vlastní čísla uspořádáme za ně. Ostatní vlastní čísla o počtu $2(n - m)$ jsou reálná. V našem případě budeme uvažovat pouze vlastní čísla komplexně sdružená. Po dosazení vlastních čísel do (5.10) dostaneme řešení ve tvaru

$$\mathbf{u}_\nu(t) = \mathbf{u}_\nu e^{(\alpha_\nu \pm i\beta_\nu)t}, \quad (5.15)$$

kde \mathbf{u}_ν představuje vektor komplexních amplitud výchylek. Lze ukázat, že reálná část vlastních čísel rozhoduje o stabilitě systému [9]. V případě, že $\alpha > 0$ se systém stává nestabilním. Pro $\alpha = 0$ je systém na mezi stability a pro $\alpha < 0$ je systém stabilní. Imaginární složka řešení představuje harmonickou funkci, které odpovídá harmonický pohyb systému. Imaginární složka vlastního čísla β_ν proto odpovídá vlastní frekvenci systému Ω_ν . Tato frekvence určuje, při kterých frekvencích je systém v rezonanci, neboli dosahuje kritických otáček.

Kritické otáčky mohou být určeny z Campbellova diagramu jako průsečík větví vlastních frekvencí s náběhovou přímkou, jak bylo naznačeno v kapitole 2.3. Campbellův diagram se sestojí provedením modálních analýz pro různé úhlové rychlosti na předem zvoleném intervalu. Úhlové rychlosti mají v Campbellovu diagramu od sebe konstantní vzdálenost. Vodorovná osa diagramu vyjadřuje úhlovou rychlost a svislá osa k ní vypočtené vlastní frekvence, viz Obr. 5.1.

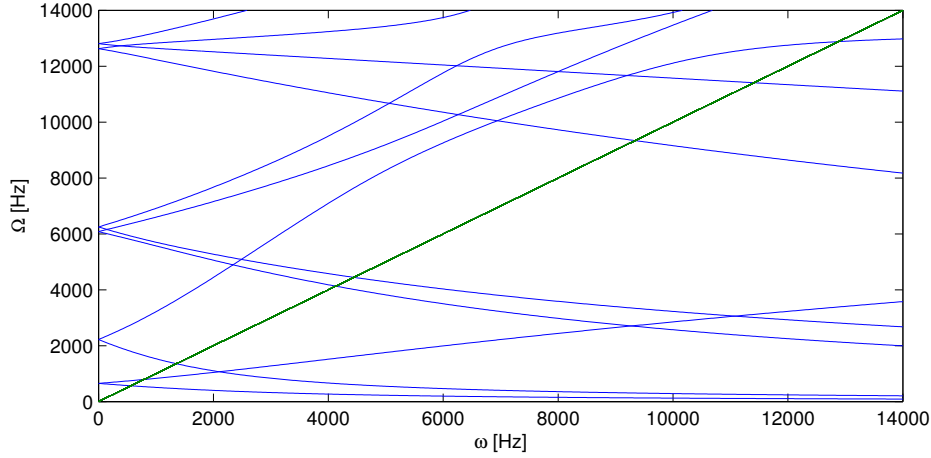
Každému vlastnímu číslu λ_ν přísluší vlastní vektor \mathbf{u}_ν (5.15), který lze využít k vizualizaci vlastních tvarů kmitů. Předpokládejme, že vlastní tvar rotoru je možné popsat pomocí komplexní harmonické funkce [1]

$$\mathbf{u}_\nu(t) = \mathbf{u}_\nu e^{i\beta_\nu t}, \quad (5.16)$$

kde β_ν je imaginární část ν -tého vlastního čísla a \mathbf{u}_ν je vlastní vektor. Komplexní amplitudy výchylek v příčných směrech j -tého uzlu označíme

$$u_{4j-3,\nu} = v_j = v_{j,r} + i v_{j,i}, \quad (5.17a)$$

$$u_{4j-2,\nu} = w_j = w_{j,r} + i w_{j,i}, \quad (5.17b)$$



Obrázek 5.1: Ukázka Campbellova diagramu

kde dolní indexy r a i vyjadřují reálnou a imaginární část vlastního vektoru.

Dosazením vztahu (5.17a) do (5.16) a použitím Eulerovy identity získáme průběh jedné komplexní amplitudy v čase

$$(v_{j,r} + iv_{j,i})e^{i\beta_\nu t} = v_{j,r} \cos \beta_\nu t + iv_{j,r} \sin \beta_\nu t + iv_{j,i} \cos \beta_\nu t - v_{j,i} \sin \beta_\nu t. \quad (5.18)$$

Stejně získáme i průběh druhé amplitudy. Poloha střednice v j -tém uzlu je vyjádřena pomocí reálných částí dvou na sebe kolmých komplexních vektorů [1]

$$v_j(\tau) = v_{j,r} \cos \tau - v_{j,i} \sin \tau, \quad (5.19a)$$

$$w_j(\tau) = w_{j,r} \cos \tau - w_{j,i} \sin \tau, \quad (5.19b)$$

kde τ vyjadřuje bezrozměrný čas z intervalu $\tau \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Tento zápis je výhodný, protože umožňuje v algoritmu vykreslit právě jednu otáčku deformované střednice bez nutnosti použít hodnoty imaginární části vlastního čísla β_ν . Jelikož jsou vlastní vektory vypočtené v rozšířeném stavovém prostoru, musíme k vykreslení amplitud využít část stavového vektoru (5.1) vyjadřující vektor výchylek $\mathbf{q}(t)$.

Kapitola 6

Aplikace

Na základě odvozených matematických modelů rotorů v předchozích kapitolách bylo v programovém prostředí MATLAB vytvořeno programové vybavení pro sestavení výpočtových modelů rotorů s uvažováním modelů ložisek, které byly odvozeny v předchozích kapitolách. Vytvořený software byl verifikován na dvou zvolených referenčních modelových příkladech. Poté byl výpočtový model využit na vyšetření modálních vlastností rotoru turbodmychadla řady C1 výrobce ČZ a.s. Turbo.

6.1 Testovací příklady

Testovací příklady byly provedeny z důvodu ověření správnosti sestavených matematických modelů. Výsledky z výpočtového modelu jsou porovnány s experimentálně získanými hodnotami a příkladem z [7]. U příkladů jsou tabulovány všechny potřebné materiálové a geometrické parametry potřebné k jeho řešení.

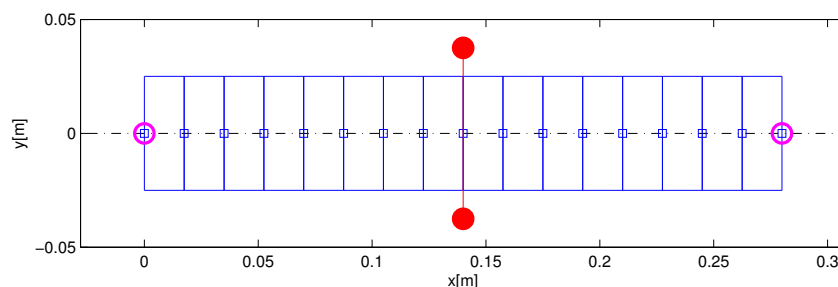
6.1.1 Příklad č. 1

Jako první referenční příklad byl vybrán model prizmatického hřídele s jedním nasazeným kotoučem. Zde je nutné podotknout, že model použitý v [7] respektuje prostorové kmitání hřídele, zatímco matematický model odvozený v této bakalářské práci uvažuje pouze ohybové kmitání hřídele.

Pro tento model byly vypočteny vlastní frekvence a určeny charakterystiky vlastních kmitů. Hřídel délky 280 mm a kruhového průřezu o průměru 50 mm byl diskretizován na 16 konečných prvků, viz Obr. 6.1. V Tab. 6.2 lze vidět počet elementů

s daným průměrem kruhového průřezu. V tomto případě se jedná o prizmatický hřídel rozdělený na 16 shodných prvků. Materiálové konstanty hřídele jsou uvedeny v Tab. 6.1.

Uprostřed hřídele je nasazen tuhý kotouč o hustotě $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$, vnějším průměrem 160 mm, vnitřním průměrem 50 mm a šířce 40 mm. Pro kotouč byla vypočtena hmotnost a momenty setrvačnosti, které jsou zapsány v Tab. 6.3. Hřídel je uložen na ložiskách, které jsou vloženy do prvního a posledního uzlu, jak je patrné z Obr. 6.1. Ložiska uvažujeme jako izotropní kluzná ložiska s tuhostí $k = 10^9 \text{ N/m}$. Pro zjištění vlastních frekvencí byl proto použit matematický model hřídele uloženého na izotropních kluzných ložiskách (4.6).



Obrázek 6.1: Diskretizace hřídele pro příklad č.1

Hustota	$\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$
Youngův modul pružnosti	$E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$
Poissonovo číslo	$\nu = 0,3$

Tabulka 6.1: Materiál hřídele

Číslo elementu	$l \text{ [mm]}$	$d \text{ [mm]}$
1	17,5	50
\vdots	\vdots	\vdots
16	17,5	50

Tabulka 6.2: Diskretizace hřídele

Uzel	Odsazení	Hmotnost	I_0	I
	[mm]	[kg]	[kg·m ²]	[kg·m ²]
9	0	5,6605	0,01988	0,01069

Tabulka 6.3: Tuhá tělesa

Výsledky lze najít v Tab. 6.4. Jak se můžeme přesvědčit, tak oproti našemu modelu s uzly charakterizovanými 4 stupni volnosti vznikají, kromě vlastních frekvencí vyjadřujících ohybové kmity, také vlastní frekvence, které vyjadřují axiální kmity a torzní deformace hřídele.

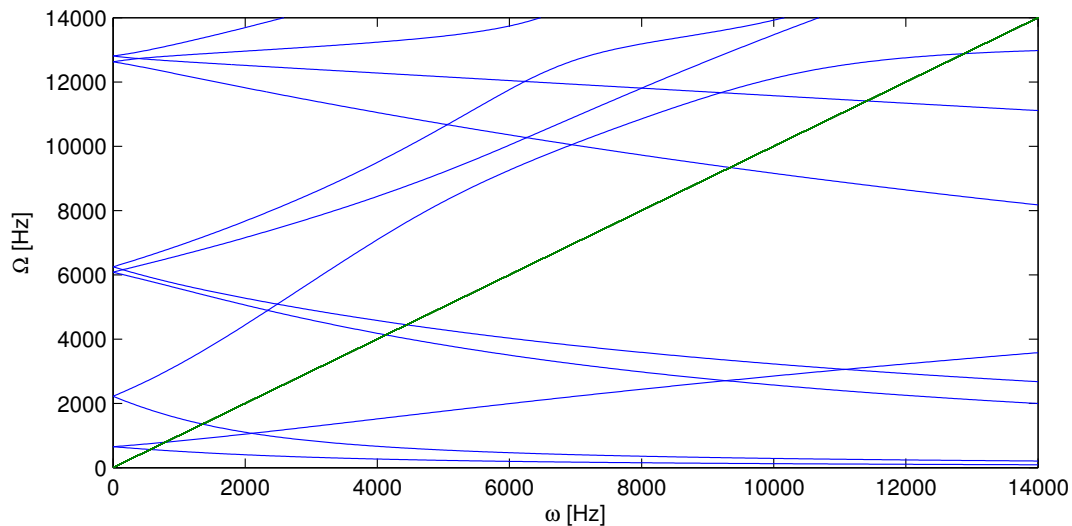
4 stupně volnosti	6 stupňů volnosti	Charakter vlastního tvaru
651	651	dominantní ohyb hřídele
-	1410	axiální kmitání rotoru
2222	2222	dominantní ohyb hřídele
-	5758	dominantní torzní deformace
-	5912	dominantní torzní deformace
6083	6083	dominantní ohyb hřídele
6248	6248	dominantní ohyb hřídele
-	9760	axiální kmitání hřídele
-	11997	axiální kmitání hřídele
12627	12627	dominantní ohyb hřídele
12810	12810	dominantní ohyb hřídele

Tabulka 6.4: Srovnání vlastních frekvencí [Hz]

Pro pozorování průběhu vlastních frekvencí byl zkonstruován Campbellův diagram, který lze vidět na Obr. 6.2. Hodnoty otáček, ve kterých protíná zelená náběhová přímka průběhy vlastních frekvencí, se nazývají kritické otáčky.

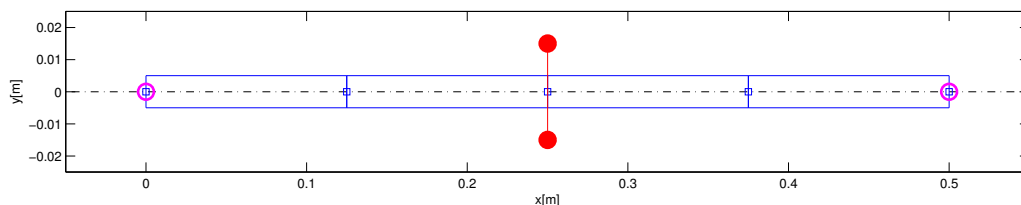
6.1.2 Příklad č. 2

V tomto případě byl vytvořen výpočtový model experimentálního rotoru RotorKit v konfiguracích popsanych v [2]. V prvním případě se jedná o hřídel s nasazeným kotoučem uprostřed mezi ložisky, viz Obr. 6.3. Prizmatický hřídel má délku 500 mm a byl rozdělen rovnoměrně na 4 konečné prvky o délce 125 mm. Materiálové



Obrázek 6.2: Campbellův diagram pro příklad č. 1

parametry hřídele jsou vyobrazeny v Tab. 6.5. Kruhový průřez hřídele je charakterizován průměrem o velikosti 10 mm. Pro kotouč byly z jeho geometrických parametrů vyjádřeny hmotnostní parametry uvedené v Tab. 6.6. Ložiskové vazby jsou zahrnuty využitím modelu izotropních kluzných ložisek o tuhosti $k = 1 \cdot 10^8$ N/m. Pro stanovení modálních vlastností modelu byly zanedbány veškeré disipativní účinky.



Obrázek 6.3: Diskretizace hřídele pro příklad č. 2 s kotoučem nasazeným uprostřed

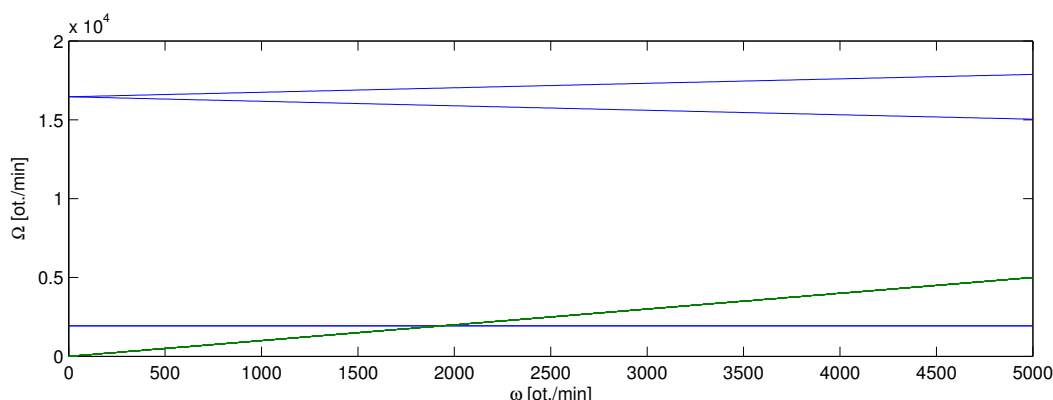
V experimentu byla změřena pouze rychlost prvních kritických otáček. Pro určení těchto otáček pomocí MKP modelu bylo potřeba sestavit Campbellův diagram a z něho určit kritické otáčky. Sestrojený Campbellův diagram, ze kterého byly odečteny první kritické otáčky, lze vidět na Obr. 6.4. Porovnání kritických otáček získaných experimentálně a výpočtem pro kotouč nasazený uprostřed hřídele lze vidět v Tab. 6.7.

Hustota	$\varrho = 7850 \text{ kg/m}^3$
Youngův modul pružnosti	$E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$
Poissonovo číslo	$\nu = 0,3$

Tabulka 6.5: Materiál hřídele

Uzel	Odsazení	Hmotnost	I_0	I
	[mm]	[kg]	[kg·m ²]	[kg·m ²]
3	0	0,814	$5,8221 \cdot 10^{-4}$	$3,3348 \cdot 10^{-4}$

Tabulka 6.6: Tuhá tělesa



Obrázek 6.4: Campbellův diagram pro příklad č. 2 s kotoučem nasazeným uprostřed

V dalším případě byl srovnán model hřídele s kotoučem, kdy kotouč nebyl nasazen uprostřed hřídele. Materiálové vlastnosti hřídele zůstávají stejné. Jak lze vidět na Obr. 6.5, model hřídele byl tentokrát rovnoměrně diskretizován pomocí 10 elementů délky 50 mm a kotouč byl nasazen v 8. uzlu, viz Tab. 6.8. Ložiskové vazby v 1. a 11. uzlu jsou modelovány jako izotropní kluzná ložiska o tuhosti $k = 1 \cdot 10^8 \text{ N/m}$. Pro tento případ byly opět odečteny první kritické otáčky z Campbellova diagramu uvedeného na Obr. 6.6 a porovnány s experimentem, viz Tab. 6.9.

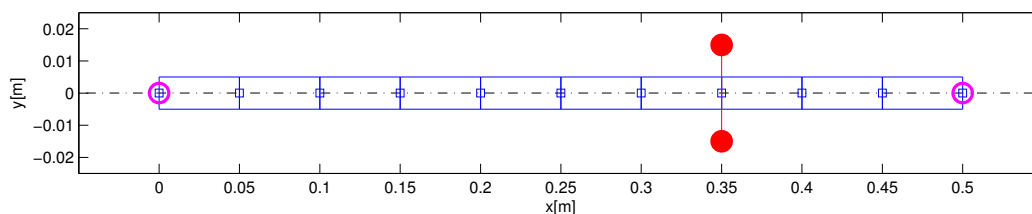
Z průběhu Campbellových diagramů na Obr. 6.4 a 6.6 pro oba případy můžeme pozorovat, že první dvě kritické otáčky u obou případů jsou téměř shodné. To může být způsobeno vlastním tvarem kmitů, při kterém se neprojeví gyroscopické

Typ	1. kritické otáčky [ot/min]
Experiment	1710
MKP model	1935

Tabulka 6.7: Porovnání 1. kritických otáček pro případ s kotoučem nasazeným uprostřed hřídele

Uzel	Odsazení	Hmotnost	I_0	I
	[mm]	[kg]	[kg·m ²]	[kg·m ²]
8	0	0,814	$5,8221 \cdot 10^{-4}$	$3,3348 \cdot 10^{-4}$

Tabulka 6.8: Tuhá tělesa



Obrázek 6.5: Diskretizace hřídele pro příklad č. 2 s kotoučem nasazeným v 8. uzlu

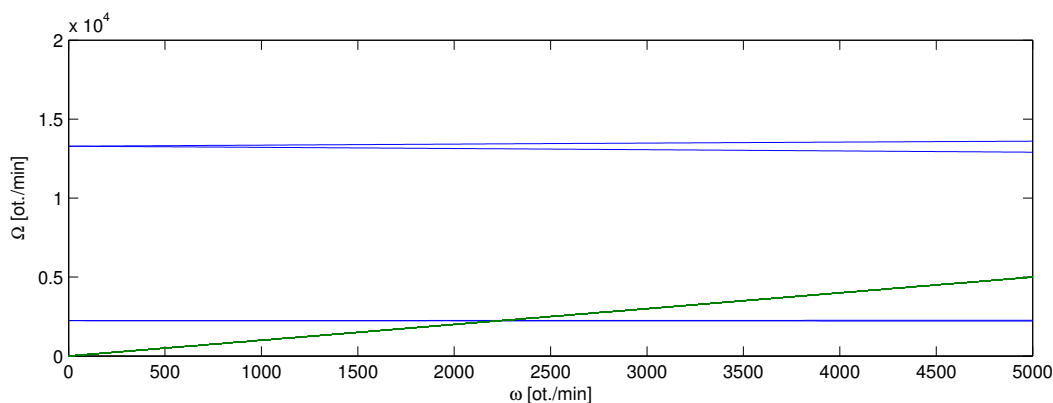
Typ	1. kritické otáčky [ot/min]
Experiment	2044
MKP model	2232

Tabulka 6.9: Porovnání 1. kritických otáček pro případ s nasazeným kotoučem mimo střed hřídele

účinky, a také relativně malými provozními otáčky.

6.2 Rotor turbodmychadla C1 výrobce ČZ a.s. Turbo

Po validaci výpočtového modelu na testovacích příkladech byl výpočtový model použit pro výpočet vlastních frekvencí, sestavení Campbellova diagramu a určení



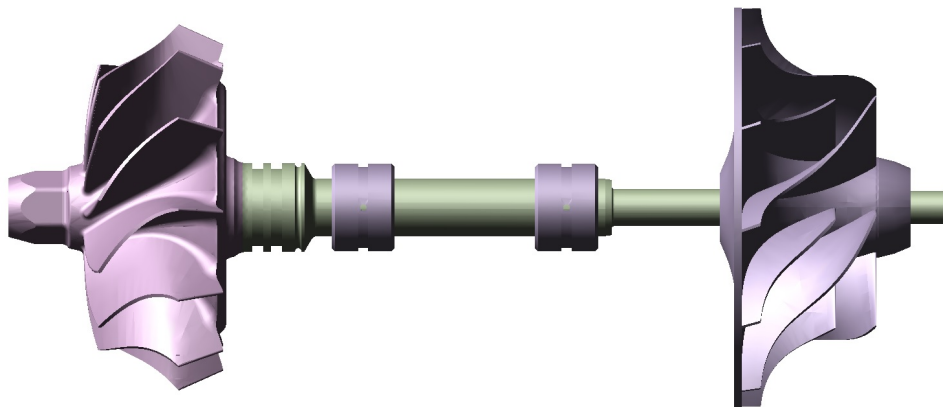
Obrázek 6.6: Campbellův diagram pro příklad č. 2 s kotoučem nasazeným mimo střed hřídele

kritických otáček rotoru turbodmychadla řady C1 výrobce ČZ a.s. Turbo. Dále byly vizualizovány vlastní tvary kmitů pro určené kritické otáčky. Při sestavování modelu bylo zanedbáno vnější i vnitřní tlumení. Na Obr. 6.7 je zobrazen rotor tohoto turbodmychadla v CAD softwaru, vlevo je umístěné turbínové kolo, vpravo dmychadlové a uprostřed jsou patrná plovoucí pouzdra.

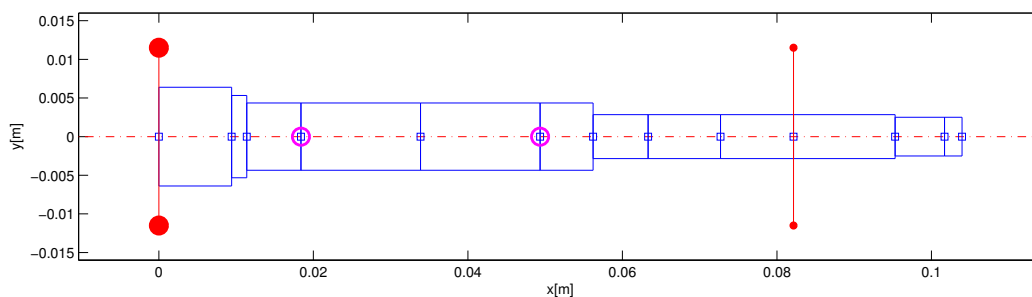
Pro zkoumání modálních vlastností rotoru turbodmychadla byly vytvořeny dva výpočtové modely, které se liší v modelech kluzných ložisek s plovoucími pouzdry. Oba modely zahrnují vliv plovoucího pouzdra. První model uvažuje izotropní vlastnosti obou vrstev olejového filmu, zatímco druhý model uvažuje tuhostní a tlumicí vlastnosti modelu ložisek závislé na otáčkách.

6.2.1 Diskretizace turbodmychadla

Z Obr. 6.7 je vidět, že se rotor skládá ze dvou kol (turbínové je na obrázku vlevo a kompresorové vpravo), hřídele a dvou ložisek s plovoucími pouzdry. Obě pouzdra mají stejnou hmotnost 5,8 g. Materiálové konstanty poddajného hřídele jsou uvedeny v Tab. 6.10. Hřídel byl diskretizován na 12 konečných prvků. Jejich geometrické parametry jsou shrnuté v Tab. 6.11. Diskretizace rotoru je znázorněna na Obr. 6.8. Uzly jsou v obrázku znázorněny čtvercem. Fialové kroužky v uzlech 4 a 6 znázorňují uzly, ve kterých jsou přidány ložiska. Do uzlu č. 1 a 10 jsou přidány tuhé kotouče, které vyjadřují turbínové a kompresorové kolo. Nesmíme však zapomenout, že turbínové kolo je z uzlu odsazené. Velikost červených plných kruhů v Obr. 6.8 vyjadřuje hmotnost nasazených kotoučů v poměru ke kotouči



Obrázek 6.7: Vizualizace rotoru turbodmychadla řady C1 s plovoucími pouzdry



Obrázek 6.8: Diskretizovaný model rotoru turbodmychadla

s největší hmotností.

Turbínové a kompresorové kolo předpokládáme jako rotačně symetrická tuhá tělesa charakterizována momentem setrvačnosti k ose rotace I_0 a momentem setrvačnosti k příčným osám I . Charakteristiky tuhých těles jsou uvedeny v Tab. 6.12.

6.2.2 Izotropní model ložisek s plovoucími pouzdry

Uvažujme matematický model (4.14), kde matice tuhosti \mathbf{K}_L nezávisí na úhlové rychlosti. Dále předpokládejme izotropní model těchto ložisek. Z důvodu izotropie v matici tuhosti ložiska s plovoucími pouzdry (4.11) vypadnou křížové členy v jednotlivých submaticích a tato matice pak přejde v i -tém uzlu do tvaru

Hustota	$\varrho = 7850 \text{ kg/m}^3$
Youngův modul pružnosti	$E = 2,05 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$
Poissonova konstanta	$\nu = 0,29$

Tabulka 6.10: Materiál hřídele

Č. elementu	l [mm]	d [mm]	Poznámka
1	9,42	12,79	ložisko v uzlu 4
2	1,96	10,65	
3	7,01	8,72	
4	15,48	8,72	
5	15,47	8,72	ložisko v uzlu 6
6	6,87	8,72	
7	7,11	5,70	
8	9,37	5,70	
9	9,46	5,70	
10	13,14	5,70	
11	6,40	5,00	
12	2,27	5,00	

Tabulka 6.11: Diskretizace hřídele

$$\mathbf{K}_{Li} = \begin{bmatrix} k_{yy}^{(I)} & 0 & -k_{yy}^{(I)} & 0 \\ 0 & k_{zz}^{(I)} & 0 & -k_{zz}^{(I)} \\ -k_{yy}^{(I)} & 0 & k_{yy}^{(O)} + k_{yy}^{(I)} & 0 \\ 0 & -k_{zz}^{(I)} & 0 & k_{zz}^{(O)} + k_{zz}^{(I)} \end{bmatrix}.$$

Tuhost obou olejových filmů $k_{yy}^{(I)}$, $k_{zz}^{(I)}$, $k_{yy}^{(O)}$ a $k_{zz}^{(O)}$ byla uvažována o velikosti $5 \cdot 10^8 \text{ N/m}$.

Pomocí výpočtového modelu byl sestrojen Campbellův diagram vykreslený na Obr. 6.9 vytvořeného pro úhlovou rychlost z intervalu $\omega = (0, 160000) \text{ ot/min}$, který odpovídá provoznímu rozsahu uvažovaného stroje. Na základě matematického modelu (4.14) ve stavovém prostoru byl vytvořen výpočtový model, který byl podrobován modálními analýzám pro jednotlivé úhlové rychlosti. Průsečíkem náběhové přímky s průběhem vlastních frekvencí z Campbellova diagramu bylo

Uzel	Odsazení [mm]	Hmotnost [g]	I_0 [kg·m ²]	I [kg·m ²]
1	-12,18	135,8	$2,1719 \cdot 10^{-5}$	$1,7933 \cdot 10^{-5}$
10	0,00	42	$8,721 \cdot 10^{-6}$	$6,355 \cdot 10^{-6}$

Tabulka 6.12: Tuhá tělesa

Krit. otáčky	[ot/min]
1	32761
2	41223
3	44533
4	51728
5	122437

Tabulka 6.13: Hodnoty kritických otáček modelu rotoru turbodmychadla s izotropním modelem ložisek s plovoucími pouzdry

určeno prvních pět kritických otáček, které byly vyneseny do Tab. 6.13.

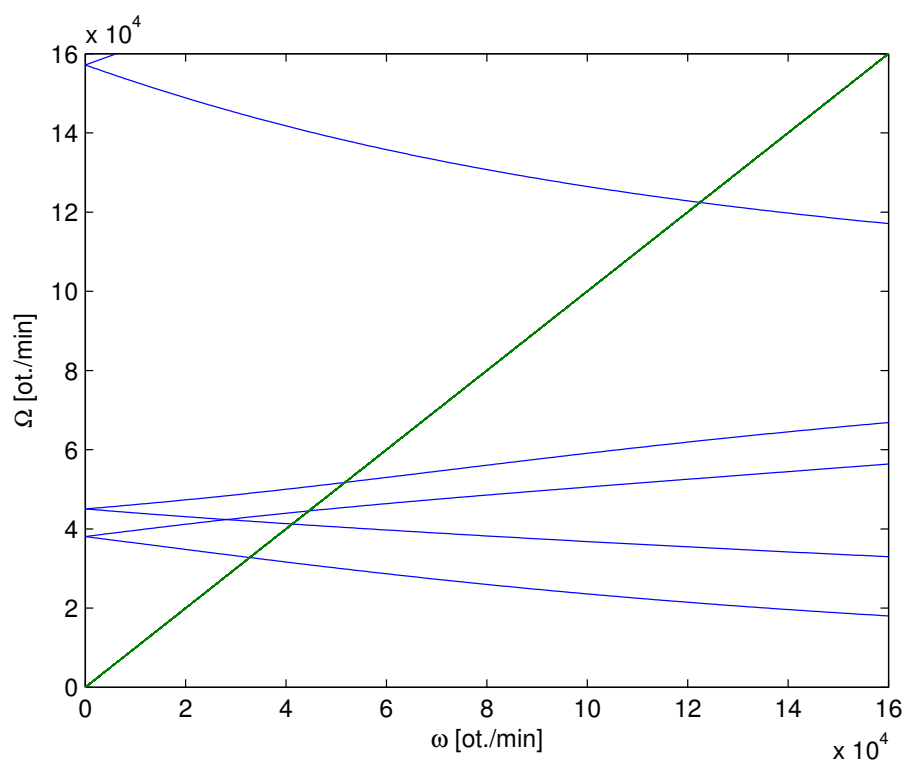
Pro prvních pět vlastních frekvencí byly sestrojeny odpovídající vlastní tvary kmitů, které lze pozorovat na Obr. 6.10. Vidíme, že všechny nalezené tvary jsou ohybové, což odpovídá odvozenému modelu v této bakalářské práci. U každého ohybového tvaru jsou vykresleny na Obr. 6.10 *orbity*¹ (znázorněny modře) a průhybová čára (znázorněna červeně). Čerchované černé kříže vyjadřují polohu ložisek.

6.2.3 Otáčkově závislý model ložisek s plovoucími pouzdry

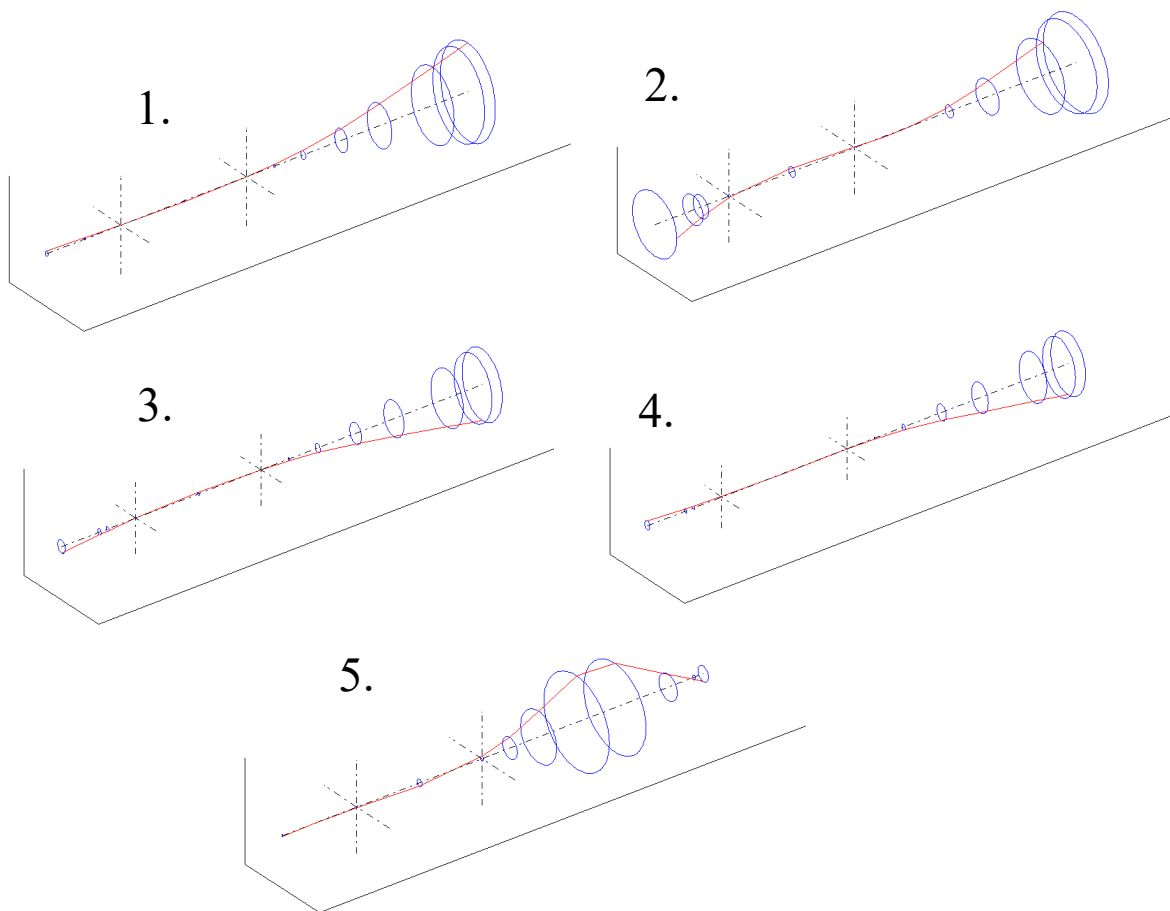
V tomto případě byla v použitém modelu ložisek matice tuhosti $\mathbf{K}_L(\omega)$ závislé na úhlové rychlosti. Matice $\mathbf{K}_L(\omega)$ byly zadány tabulkou pro úhlové rychlosti $\omega \in \langle 0, 160000 \rangle$ ot/min s krokem 1000 ot/min. Konkrétní hodnoty byly získány pomocí softwaru dostupného na pracovišti katedry mechaniky [12].

Pro výpočet vlastních frekvencí byl stejně jako u předchozího příkladu použit matematický model (4.14) ve stavovém prostoru. Kromě matice tuhosti ložisek se žádné jiné parametry rotoru nezměnily. Pro zjištění kritických otáček byl sestrojen Campbellův diagram, viz Obr. 6.11, ze kterého byly vyneseny hodnoty kritických otáček do Tab. 6.14.

¹ *Orbit* je křivka zobrazující dráhu středu hřídele v rovině kolmé na osu rotace hřídele.

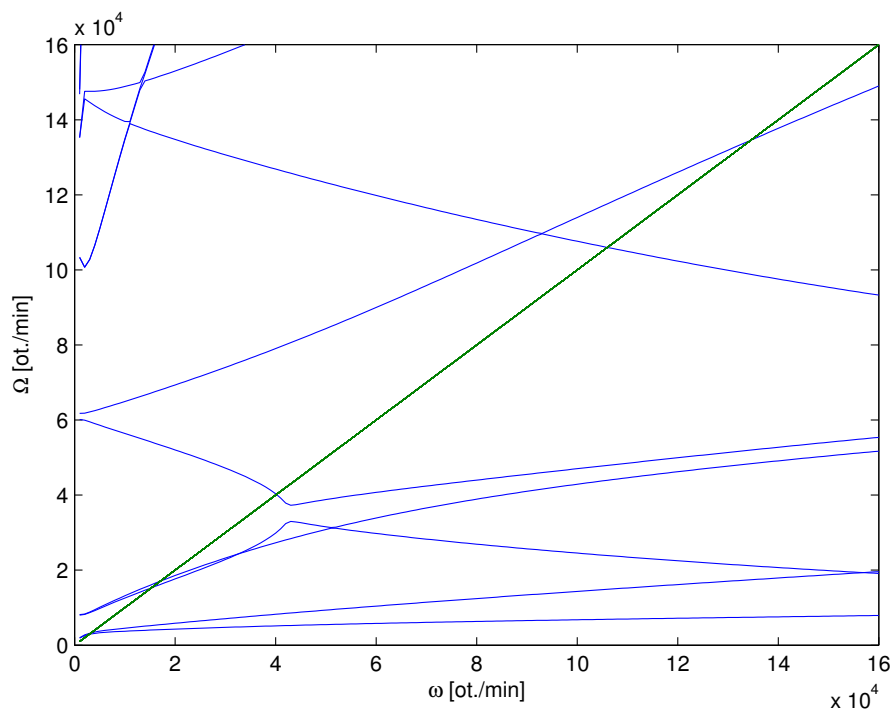


Obrázek 6.9: Campbellův diagram pro izotropní model ložisek s plovoucími pouzdry



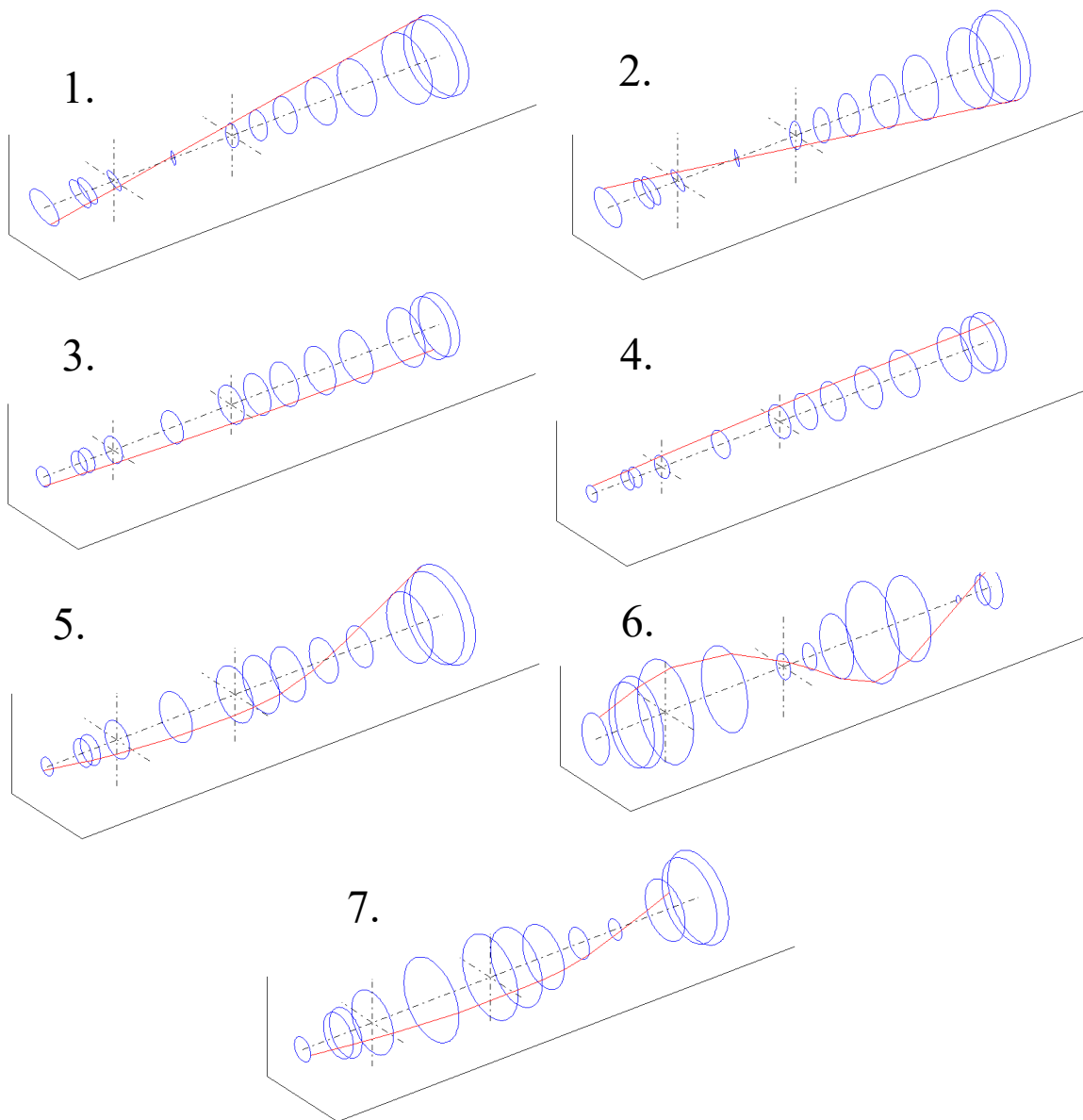
Obrázek 6.10: Vizualizace vlastních tvarů kmitů prvních pěti kritických otáček pro izotropní model ložisek s plovoucími pouzdry

Pro zjištění kritické otáčky byla provedena vizualizace vlastních tvarů kmitů na Obr. 6.12. Z vizualizace vlastních tvarů kmitů se můžeme opět přesvědčit, že se jedná o ohybové kmity.



Obrázek 6.11: Campbellův diagram pro otáčkově závislý model ložisek s plovoucími pouzdry

Pro rotor turbodmychadla C1 výrobce ČZ a.s. Turbo byly sestaveny Campbellovy diagramy pro 2 různé modely ložisek s plovoucími pouzdry. Na základě srovnání Campbellových diagramů sestavených pro obě varianty modelů rotoru C1, je patrné, že při uvažování otáčkově závislých tuhostních a tlumicích parametrů ložisek je spektrum vlastních frekvencí „bohatší“. Zejména se vyskytují rezonanční frekvence v tzv. subharmonické oblasti. Výskyt těchto frekvencí je dán rozdílnými vlastnostmi vnitřního a vnějšího olejového filmu. Důsledkem toho v praxi pak je, že při provozu rotoru dochází ke zvýšení vibrací s odpovídajícími subharmonickými frekvencemi.



Obrázek 6.12: Vizualizace vlastních tvarů kmitů prvních sedmi kritických otáček pro otáčkově závislý model ložisek s plovoucími pouzdry

Krit. otáčky	[ot/min]
1	2894
2	3293
3	15309
4	17069
5	40152
6	105992
7	134585

Tabulka 6.14: Hodnoty kritických otáček modelu rotoru turbodmychadla s otáčkově závislým modelem ložisek s plovoucími pouzdry

Kapitola 7

Závěr

Tato bakalářská práce se zabývá dynamikou rotorových soustav. V kapitole 2 byly shrnuty základní modely rotorů - Lavalův a Stodolův-Greenův rotor. Na těchto modelech byly vysvětleny pojmy vyskytující se v dynamice rotorů - odezva na harmonické buzení, amplitudová a fázová charakteristika, kritické otáčky, vlastní frekvence a Campbellův diagram.

V kapitole 3 byl odvozen matematický model hřídele, u kterého byly předpokládány ohybové kmity. Model byl rovněž doplněn o tuhá tělesa. V další kapitole byly odvozeny linearizované matematické modely ložisek, které byly zahrnuty do modelu rotoru. Dále bylo vysvětleno sestavení globálních matic rotorové soustavy. Úloha modální analýzy byla představena a vysvětlena v kapitole 5. Výhodou takto odvozeného modelu je možnost jeho rozšíření o další prvky. V budoucnu lze model rozšířit např. o axiální a torzní kmity. Můžeme tak dosáhnout ještě přesnějších modelů rotorů a aplikovat je u dalších složitějších rotorových soustav.

V prostředí MATLAB bylo vytvořeno programové vybavení pro vyšetření modálních vlastností rotorové soustavy. Programové prostředí je univerzální a může být použito pro jakoukoli rotorovou soustavu složenou z prvků odvozených v rámci této bakalářské práce. Po srovnání tohoto programového prostředí na 2 testovacích příkladech byl výpočtový model aplikován na rotor turbodmychadla řady C1 výrobce ČZ a.s. Turbo, u kterého byly vyšetřeny jeho modální vlastnosti.

Jak bylo zmíněno v kapitole 4, odvození matematického modelu ložisek přesahuje rámec této bakalářské práce. Zde je možnost v budoucnu model rozšířit o nelineární hydrodynamické síly v kluzných ložiskách. Určitou motivací do budoucna je kromě rozšíření matematického modelu také jeho porovnání s experimentem, který bude proveden na podzim tohoto roku v prostorách zkušeben výrobce turbodmychadel ČZ a.s., divize Turbo, Strakonice.

Literatura

- [1] Smolík, L.: Analýza dynamických vlastností rotorů turbodmychadel, diplomová práce, FAV ZČU, 2013.
- [2] Dyk, Š.: Dynamika Lavalova a Stodola-Greenova rotoru, bakalářská práce, FAV ZČU, 2011.
- [3] Bugar, J.: Výpočtová analýza vibrací rotoru turbodmychadla, diplomová práce, FAV ZČU, 2016.
- [4] Charypar, M.: Možnosti ovlivňování charakteristiky spalovacího motoru úpravami sacího systému, bakalářská práce, FS ZČU, 2015.
- [5] Holík, P.: Turbodmychadla spalovacích motorů, bakalářská práce, FSI VUT Brno, 2010.
- [6] Gasch, Robert, Pfützner, Herbert a Juliš, Karel: Dynamika rotorů. 1. vydání. SNTL, Praha, 1980.
- [7] Byrtus, M. – Hajžman, M. - Zeman, V.: Dynamika rotujících soustav, Vydavatelství ZČU v Plzni, 2011
- [8] Childs, D.: Turbomachinery Rotordynamics: Phenomena, Modeling & Analysis, New York, 1993
- [9] Zeman, V. - Hlaváč, Z.: Kmitání mechanických soustav. Vydavatelství ZČU v Plzni, 1999
- [10] Hung Nguyen - Schäfer: Rotordynamics of Automotive Turbochargers: Linear and Nonlinear Rotordynamics - Bearing Design - Rotor Balancing. Berlin, 2012

- [11] Zeman, V., Hlaváč, Z., Rendlová, Z.: Modelování kmitání turbodmychadel, Výzkumná zpráva číslo 529137-01-13, Plzeň, 2013
- [12] Byrtus, M., Rendlová, Z., Smolík, L.: Výpočtová analýza kritických otáček ložiskového uzlu C13 (JAMZ), Výzkumná zpráva číslo NTIS-VP3-0002/2017, Plzeň, 2017